

JEAN-BLAISE GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule I



LOGIQUE MODERNE

L'ouvrage traite de la logique mathématique dans une perspective non algébrique. Il s'adresse, en effet, principalement aux étudiants et aux chercheurs en sciences humaines et non aux mathématiciens.
Il se propose une double fin:
D'une part, il veut présenter la logique comme un instrument réellement applicable à l'analyse de situations et de problèmes divers. C'est la raison pour laquelle une importance particulière a été accordée à la «déduction naturelle», système où des règles d'inférence tiennent la place des axiomes traditionnels.
D'autre part, il se propose, sans recourir à des considérations métamathématiques, d'éclairer la ...ique sous divers de ses aspects. ...st ainsi que, en plus de la dé...tion naturelle (Fascicule ...), il ...osera pour la logique des pro...tions (Fascicule II) et pour ... des prédicats (Fascicule III) ...notions de tables de vérité, ...iomatisation et de modèle. Un ...icule fournira aussi des exer...s, notamment des exemples de ...duction» et des compléments. ...n un dernier cahier traitera des ...ques non classiques (logiques ...itionnistes, polyvalentes, mo...es), toutes logiques moins con...s, mais qui semblent offrir des possibilités d'avenir aux sciences de l'homme.



LOGIQUE MODERNE

Fascicule I

ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES — SORBONNE
SIXIÈME SECTION: SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME
X

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

Jean-Blaise GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule I

LOGIQUE DES PROPOSITIONS
ET DES PRÉDICATS
DÉDUCTION NATURELLE

MOUTON / GAUTHIER-VILLARS

Deuxième édition 1972

© École Pratique des Hautes Études
Mouton Éditeur
7, rue Dupuytren - Paris 6
5, Herderstraat - La Haye
Éditions Gauthier-Villars
55, quai des Grands-Agustins - Paris 6
1969

Diffusion en France:
Dunod, 92, rue Bonaparte - Paris 6

Printed in the Netherlands

INTRODUCTION

Nous utilisons fréquemment le mot « logique », aussi est-il légitime de nous demander quelles notions y sont liées. Il est facile d'en dégager plusieurs.

1. La première idée qui vient à l'esprit est que la logique a quelque chose à voir avec la *démonstration*. Nous avons tous gardé le souvenir des théorèmes de notre enfance qui se terminaient par c.q.f.d. et Aristote dit de la logique que « son sujet, c'est la démonstration » (*Prem. Anal.*, 24a10).

2. Reste à savoir ce qu'est au juste la démonstration et c'est un des objets de ce cours que de le préciser. Il est cependant déjà possible d'affirmer qu'une démonstration consiste en un enchaînement, disons d'idées ou de concepts, par opposition à des images, par exemple, et qu'elle renvoie à la *raison* plutôt qu'à l'intuition, à la perception sensible ou à d'autres « facultés ». La logique, disait St. Thomas d'Aquin, est « l'art qui dirige l'acte même de la raison, c'est-à-dire l'acte par lequel l'homme procède dans l'acte même de la raison par ordre, facilement et sans erreur » (*Sec. Anal.* I, 1).

Il est important de noter qu'il s'agit d'un « art », c'est-à-dire d'un savoir-faire, que cet art permet de « procéder », donc de passer d'une idée à une autre et que le passage se fait « par ordre » et « facilement ». Cela signifie que les lois logiques ont un caractère systématique d'une part, et qu'elles sont l'expression de certaines formes ou habitudes de pensée d'autre part.

3. Mais le texte cité précise encore que la logique permet d'avancer « sans erreur » et ici une distinction s'impose. Considérons les deux raisonnements suivants:

Raisonnement 1: Si les souris sont des hommes et si les hommes ont des plumes, alors les souris ont des plumes.

Raisonnement 2: Si les souris sont des vertébrés et si les mammifères sont des vertébrés, alors les souris sont des mammifères.

La conclusion du premier raisonnement est une proposition fausse, en

ce sens que la zoologie contredit l'affirmation que les souris (non chauves!) ont des plumes. En revanche, la conclusion du second raisonnement est vraie, les souris sont, en effet, des mammifères. Toutefois le raisonnement 1 est correct et le raisonnement 2 ne l'est pas. Si tous les *A* sont *B* et si tous les *B* sont *C*, on peut toujours affirmer que tous les *A* sont *C*. Mais, si tous les *A* sont *C* et si tous les *B* sont *C*, on ne peut garantir, en général que tous les *A* sont *B*.

Ainsi, faut-il distinguer la vérité d'une proposition, dont on s'assure dans ces exemples par des constatations d'ordre zoologique et la *validité* ou la correction d'un raisonnement, qui est une question de pure logique et n'a pas à recourir à l'observation ou à l'expérience. C'est pourquoi, dans son *Vocabulaire de la philosophie*, A. Lalande définit la logique comme « la science ayant pour objet de déterminer, parmi toutes les opérations intellectuelles tendant à la connaissance du vrai, lesquelles sont valides, et lesquelles ne le sont pas » (Art. *Logique*).

4. La distinction faite plus haut, entre la vérité d'une proposition et la validité d'un raisonnement, nous a implicitement conduit à celle entre *contenu* et *forme*. Le contenu de la proposition « les souris ont des plumes » se se rapporte à certains animaux et à leur pelage, sa forme est celle d'une affirmation valable pour tous les membres d'une classe.

Ce n'est d'ailleurs pas tout. Deux des définitions proposées, celles de St. Thomas et de A. Lalande, se réfèrent explicitement à l'activité même de la pensée. Il y a deux objections à cette manière de faire. L'une est que l'étude des processus intellectuels est du ressort de la psychologie: il y a là une question de faits que l'expérience peut seule examiner. L'autre est que cette activité intellectuelle ne s'observe jamais directement et qu'il faut la saisir dans ses productions. Celles-ci, certes, sont nombreuses, mais il en est une qui joue un rôle privilégié et c'est celle qui se présente sous la forme de discours. Comme un discours est une suite de *propositions* (ou d'énoncés), nous en arrivons à la définition que propose A. Church: « La logique (formelle) s'occupe de l'analyse des phrases [sentences] ou des propositions et de celle des preuves, l'attention portant sur la forme par abstraction du contenu » (*Introduction to mathematical logic*, I, p. 1).

Soit alors le discours suivant: « Il n'y a pas d'amour heureux, mais c'est notre amour à tous deux » (Aragon).

Pour l'examiner d'un point de vue logique, il faut donc 1) faire abstraction de son contenu et 2) analyser ses propositions. Il est évident qu'une telle analyse peut être plus ou moins poussée. Nous distinguerons deux niveaux.

1er niveau: Le texte est décomposé en propositions indépendamment de leur forme.

C'est ainsi que nous avons ici deux propositions « il n'y a pas d'amour

heureux » et « c'est notre amour à tous deux », reliées par la conjonction « mais ». La partie de la logique qui arrête l'analyse à ce niveau est dite *logique des propositions* (inanalysées). Elle fait l'objet de la première partie de ce fascicule.

2e niveau: Chaque proposition est analysée en éléments qui correspondent classiquement aux sujets, prédicats, relations.

Ainsi, la première proposition serait paraphrasée de la façon suivante: « Il n'y a pas d'objet de pensée qui soit un amour et qui jouisse de la propriété d'être heureux ». La partie de la logique qui traite aussi de cet aspect des choses est appelée la *logique des prédicats* (du 1er ordre). Elle fait l'objet de la deuxième partie de ce fascicule.

PREMIÈRE PARTIE

LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS INANALYSÉES

L'IDÉE NAÏVE DE DÉDUCTION

1.1 Un exemple de déduction

Nous allons chercher, dans ce premier chapitre, à dégager un certain nombre de règles de déduction et à les exprimer de façon précise et commode. Partons pour cela d'une déduction simple, telle qu'elle se présente dans le discours quotidien.

« Si le ciel se couvre, il ne gèlera pas et s'il ne gèle pas, le chien peut rester dehors pour la nuit. Le ciel se couvre. Donc le chien pourra rester dehors ».

Il faut tout d'abord remarquer que, d'un point de vue tout extérieur, nous avons affaire à une suite de propositions. Cherchons donc à les énumérer. Nous nous heurtons immédiatement à une difficulté: certaines sont au présent, d'autres au futur. Faut-il compter « il ne gèlera pas » comme une proposition et « il ne gèle pas » comme une autre ou, au contraire, puisque toutes deux ont trait au même fait, faut-il n'en compter qu'une? D'autre part, « le chien peut rester dehors pour la nuit » contient deux verbes, « peut » et « rester ». S'agit-il d'une ou de deux propositions?

Ces quelques remarques montrent que, aussitôt que l'on s'efforce de tirer au clair des procédures pourtant familières, on se met dans l'obligation d'effectuer certains choix plus ou moins arbitraires et d'effectuer un certain nombre de simplifications. Le fait est d'importance, en ce sens qu'il manifeste l'autonomie du système que l'on a l'intention de construire. En droit, en effet, nous sommes entièrement libres de nous donner les règles de déduction que nous voulons. De même que le géomètre, qui crée des êtres abstraits à l'aide de ses lignes sans épaisseur et de ses points sans dimension, peut les doter des propriétés qui lui plaisent, de même nous pouvons, si nous le voulons, attribuer aux objets abstraits que nous allons appeler des propositions n'importe quelles propriétés. Toutefois ce n'est encore qu'un aspect de la situation. Le géomètre souhaite que les objets qu'il crée puissent

admettre certains modèles concrets (des figures dessinées à l'encre, par exemple). Quant à nous, nous désirons que ce que nous nommerons « propositions » ait quelque chose à voir avec les propositions que nous énonçons en parlant chaque jour.

C'est la raison pour laquelle notre démarche, dans ce premier chapitre, sera la suivante:

1. Examiner certains emplois attestés.
2. En retenir quelques-uns, soit que nous les supposions particulièrement importants en pratique, soit qu'ils conviennent à notre construction pour des raisons propres au logicien.
3. Oublier l'origine pratique de notre choix et nous en tenir strictement à ce que nous aurons posé.
4. Interpréter le système obtenu dans les termes concrets qui lui auront servi d'origine.

Dans la construction de la géométrie, le point 1 correspond à l'examen quasi-physique des propriétés des objets, plus ou moins bien dessinés; le point 2 au choix des axiomes et des postulats; le point 3 au déroulement du système de la géométrie et le point 4, enfin, à l'application de la géométrie à la réalité concrète.

Ceci dit, nous allons prendre notre première décision en postulant que nous ne tiendrons pas compte des diverses formes des verbes, non plus d'ailleurs que d'autres différences stylistiques qui pourraient se présenter. En fait, notre décompte sera sensiblement celui des « phrases-noyaux » de Chomsky.

Reste la question de savoir comment découper les propositions. Puisque, à ce stade, nous procédons intuitivement, donnons-nous un critère, lui aussi intuitif. Sera réputée proposition unique, celle qui est susceptible d'être dite vraie ou fausse. Ainsi, il n'y a aucun sens à dire que « le chien peut » est vraie ou fausse, tandis qu'il y en a un à le dire de « le chien peut rester dehors pour la nuit ». Cette dernière expression sera donc comptée comme une seule proposition.

Finalement nous aurons donc affaire à trois propositions, que nous allons abréger par les lettres p, q et m:

p : le ciel se couvre

q : il ne gèle pas

m: le chien peut rester dehors pour la nuit.

La déduction prend alors la forme abrégée suivante:

« Si p alors q et si q alors m. p. Donc $\underline{m}$. »

Nous voyons maintenant qu'il est possible de partager nos propositions en deux espèces. Les unes sont simples: p, m. Les autres sont composées: si p alors q et si q alors m. Nous appellerons les premières des *propositions*

atomiques et les secondes des *propositions composées* ou *moléculaires.* Mais composées comment? On le voit: à l'aide de propositions atomiques (p, q et m) et des mots « si ... alors » et « et ».

Remarque

Le caractère atomique d'une proposition est relatif et dépend largement des décisions que l'on prend. Ainsi, nous avons décidé de considérer « il ne gèle pas » comme un atome. Mais rien ne nous aurait empêché de choisir « il gèle » pour atome et de faire de « il ne gèle pas », donc de « non il gèle » une proposition moléculaire, composée de la négation « non » et de l'atome « il gèle ».

Reste à nous occuper du caractère déductif de l'exemple. Pour mieux le faire ressortir, écrivons les choses comme suit:

1	Si p alors q et si q alors m
2	p
	—
3	m

Les propositions 1 et 2, séparées de la proposition 3 par une petite barre horizontale, constituent les *hypothèses* de la déduction. La proposition 3 en est la *conclusion.* La ponctuation, qui séparait « si p alors q et si q alors m » de « p » et « p » de « Donc m » n'est ici plus nécessaire, puisque les propositions sont écrites individuellement les unes au-dessous des autres. Quant au mot « Donc », il est représenté par la petite barre horizontale.

Remarque

On dit aussi que m est déduite de la classe d'hypothèses {si p alors q et si q alors m, p}.

1.2 Règles générales

Les règles de déduction doivent pouvoir s'appliquer à n'importe quelles propositions, atomiques ou composées. Nous n'allons donc pas les formuler en utilisant des propositions particulières comme « le ciel est couvert » ou « il ne gèle pas », même si celles-ci sont abrégées par des lettres p et q. De même qu'en algèbre on utilise des variables, x, y, etc., pour désigner des nombres et que celles-ci ne sont pas des nombres, de même nous allons introduire des variables pour désigner des propositions. Nous utiliserons des majuscules: P, Q, M et ces mêmes lettres affectées d'accents: P', Q', etc. Ces lettres prennent leurs valeurs sur l'ensemble des propositions, ce

qui signifie qu'elles désignent des propositions, atomiques ou composées, sans être elles-mêmes des propositions. On les nomme *variables syntaxiques* ou *métavariables*.

Exemple: Dans la déduction du paragraphe précédent, P pourrait prendre la valeur « si p alors q et si q alors m », Q la valeur p et M la valeur m.

Remarque

Si une même métavariable figure plusieurs fois dans un contexte donné, il est entendu qu'elle désigne chaque fois la même proposition. En revanche, deux métavariables différentes peuvent désigner soit deux propositions différentes, soit la même proposition.

Règle hyp

Toute déduction part d'une classe de prémisses et on ne voit pas ce qui limiterait la liberté qu'a l'esprit de considérer n'importe quelles propositions pour en examiner les conséquences. Nous allons donc nous donner le droit de poser, sans restrictions, des hypothèses quelconques. Toutefois, il faut savoir exactement de quelles hypothèses dépend la déduction. On peut imaginer toutes sortes de procédés pour ne pas l'oublier. Celui adopté ici, un trait vertical qui court tout au long de la déduction et une petite barre horizontale sous la dernière hypothèse, est emprunté à F.B. Fitch et il se révèle particulièrement commode. Aussi allons-nous poser la règle suivante:

Règle hyp: On peut, à toute étape d'une déduction, introduire une ou plusieurs hypothèses, à condition de les accompagner d'un trait vertical à gauche et de faire suivre la dernière d'une petite barre horizontale.

Exemple:

```
1 | P              hyp
2 | Q              hyp
  |—
k |  | M           hyp
  |  |—
l |  |  | P'       hyp
  |  |  |—
  |  |  |
```

Les nombres 1, 2, ..., k, l qui figurent à gauche servent à numéroter les lignes de la déduction. Pas plus que l'abréviation « hyp », qui indique au nom de quelle règle la proposition est posée, ils n'appartiennent à la déduction. Ce sont des indications à soi-même ou au lecteur.

Règle rep

Toute déduction exige d'écrire des propositions les unes à la suite des autres et se déroule donc dans le temps. Il s'agit toutefois là d'un aspect matériel et contingent. En fait, la déduction elle-même a un caractère atemporel, ce qui fait que toute proposition, une fois posée, le reste tout au long de la déduction.

Nous tiendrons compte de ce double fait — une proposition vraie le reste, mais nous sommes obligés de procéder dans le temps — en nous accordant le droit de répéter, n'importe où dans la déduction toute proposition qui la précède. Et nous noterons:

Règle rep (règle de répétition):

```
n | P
  |---
  | P        n, rep
```

Dans le langage quotidien, cette règle correspond à des locutions telles que « comme on l'a vu plus haut », « mais on sait que », etc.

Règle reit

Nous ne voulons pas, ici, limiter le droit à la répétition. Toutefois d'un point de vue formel, nous pouvons nous trouver en présence de deux situations distinctes. Soit la déduction suivante:

```
1 | P                 hyp
  |—
2 | P
3 |   | Q             hyp
  |   |—
4 |   | P
5 |   |   | M         hyp
  |   |   |—
6 |   |   | P
```

La proposition P a été « répétée » trois fois: lignes 2, 4 et 6. Aux lignes 4 et 6, elle est « répétée » à l'intérieur d'une *sous-déduction* de la déduction principale, mais à la ligne 2 elle est « répétée » dans la déduction principale elle-même. On peut dire aussi que pour écrire P aux lignes 4 et 6, il a fallu franchir une (ou plus d'une) barre verticale, ce qui n'est pas le cas pour la

ligne 2. Pour des raisons qui apparaîtront dans la deuxième partie de ce fascicule, il est utile de distinguer les deux cas. Nous parlerons de *répétition* (règle rep) à la ligne 2 et de *réitération* aux lignes 4 et 6 (règle reit).

Règle reit :

```
n | P
  |---
  |  | P        n, reit
```

Règle repdf

Il est très souvent commode, et même pratiquement indispensable, d'abréger certaines expressions. Ainsi, au lieu de « lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe » est-il usuel de dire « circonférence ». Le mot « circonférence » abrège l'expression « lieu géométrique ... », il a la même signification. « Circonférence » est le *défini* et « lieu géométrique ... » est le *définissant*. Nous désignerons par le signe complexe, mais qui doit être considéré comme un tout, =df la relation qui unit le défini et le définissant.

Exemples :

ONU =df Organisation des Nations Unies

p =df le ciel se couvre

Nous nous donnerons alors la règle de répétition par définition sous les deux formes suivantes:

Règle repdf

Si Q =df P:

```
n | P                        n | Q
  |---                         |---
  | Q        n, repdf          | P        n, repdf
```

Remarque

Cette règle correspond aux expressions courantes « en d'autres termes », « plus simplement », etc.

Nous avons dit qu'à ce niveau d'analyse, nous aurions affaire à des propositions considérées comme des touts et reliées entre elles par des conjonctions ou des locutions conjonctives. Ainsi nous nous trouverons en présence

d'expressions de la forme: *P, Q, P et Q, P ou Q, si P alors Q*, pour prendre quelques exemples.

Toute proposition de ce genre peut nous servir d'hypothèse (règle hyp) et être répétée de diverses façons (règles rep, reit, repdf). Ceci est toutefois bien insuffisant pour obtenir des déductions qui pourront s'interpréter de façon utile. Nous devons encore apprendre à composer les propositions entre elles et, lorsqu'elles sont complexes (ou moléculaires) à les décomposer. Nous allons donc chercher deux catégories de règles:

1. Des *règles d'introduction* qui permettront d'introduire dans les conclusions certains signes de liaison qui ne figuraient pas dans les prémisses.

Exemple: Une de nos règles posera (§ 1.4) qu'à partir des deux prémisses *P, Q*, nous avons le droit de poser la conclusion: *P et Q*. La règle aura introduit la conjonction « et ».

2. Des *règles d'élimination* qui permettront d'éliminer certaines liaisons qui figuraient dans les prémisses.

Exemple: Une de nos règles posera (§ 1.3) qu'à partir des deux prémisses *P* et *si P alors Q*, nous sommes en droit d'écrire la conclusion *Q*. La règle aura éliminé la locution « si ... alors ».

1.3 La proposition conditionnelle

Nous appellerons (proposition) *conditionnelle* toute proposition de la forme

si *P* alors *Q*,

étant entendu que *P* et *Q* désignent des propositions soit atomiques, soit moléculaires.

Exemples

[1] Si le nombre *n* est divisible par 6, alors il est pair.
[2] S'il pleut dimanche, le match n'aura pas lieu.
[3] « Il les condamne dans Jansénius, si elles y sont » (Pascal).
[4] S'il est vraiment courageux, alors si le fantôme apparaît, il s'en moquera.
[5] Si j'avais su, je ne serais pas venu!
[6] S'il réussit ses examens, je mange mon chapeau.

Les exemples [2] et [3] fournissent des variations linguistiques de « si ... alors ». Mais il convient toujours de distinguer deux propositions:
celle qui suit le mot « si », qui constitue l'*antécédent* de la conditionnelle, l'autre, qui en est le *conséquent*.

Au lieu d'écrire une proposition conditionnelle sous la forme: « si proposition antécédente, alors proposition conséquente », nous introduirons le signe « $\supset$ ». Ainsi, en posant:

p =df il pleut dimanche

q =df le match n'aura pas lieu,

on aura pour l'exemple [2]: $p \supset q$.

Remarque

Certains auteurs écrivent $p \rightarrow q$ ou $p \Rightarrow q$, là où nous écrivons $p \supset q$. Peu importe d'ailleurs, ces signes sont tous des *foncteurs propositionnels*. Ils désignent une opération, celle qui, appliquée à deux propositions, fournit une troisième proposition, une conditionnelle.

Le quatrième exemple pose un problème. Si nous ne prêtons pas trop d'attention à la ponctuation, nous sommes enclins à l'écrire:

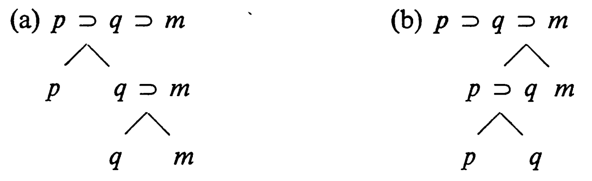
$p \supset q \supset m$,

les lettres p, q et m ayant une signification évidente. Sous cette forme cependant, la proposition est ambiguë. Il est en effet possible de l'analyser de deux façons:

(a) $p \supset Q$ où Q désigne $q \supset m$

(b) $P \supset m$ où P désigne $p \supset q$.

Ces deux analyses correspondent aux arbres suivants:



Pour lever de telles ambiguïtés, nous userons de parenthèses, sans d'ailleurs prendre ici la peine d'en fixer précisément le maniement (voir le Fascicule 3). Nous interpréterons l'exemple [4] de la façon suivante:

$$p \supset (q \supset m),$$

ce qui correspond donc à la forme (a).

Enfin, les exemples [5] et [6] apparaissent rapidement transmettre un tout autre genre d'information que les quatre premiers. Ceux-ci correspondent, très sommairement, à la situation suivante. On sait (ou on décide) que dans le cas où les circonstances décrites par l'antécédent P se réaliseront, alors les circonstances décrites par le conséquent Q se réaliseront aussi. En revanche, on ne sait pas actuellement ce qu'il en est de P et c'est même la raison pour laquelle on dit « *si P alors Q* ».

Il en va tout autrement pour l'exemple [5] où celui qui parle ne sait que trop que l'antécédent P n'a pas été réalisé et dans l'exemple [6] où le locuteur s'attend si peu à ce que l'antécédent P se vérifie qu'il est disposé à promettre n'importe quoi.

Les règles que nous allons poser s'inspireront du premier usage de « si ... alors» (exemples [1] à [4] (et nullement des deux autres. C'est ainsi que nous poserons, pour éliminer le signe « $\supset$ », la règle d'élimination suivante:

Règle $\supset$ e

n	$P \supset Q$	
m	P	
	- - -	
	Q	$n, m, \supset$ e

Le trait pointillé indique que les propositions numéros n et m ne sont pas nécessairement des hypothèses (au sens de la règle hyp), mais servent de *prémisses* à la règle $\supset$ e. Cette règle est aussi classiquement nommée règle du *modus ponens.*

Exemples

[1]

1	$p \supset q$	hyp
2	$q \supset m$	hyp
3	p	hyp
	—	
4	q	1, 3, $\supset$ e
5	m	2, 4, $\supset$ e

[2]

1	p	hyp
2	$p \supset (p \supset q)$	hyp
	—	
3	$p \supset q$	2, 1, $\supset$ e
4	q	3, 1, $\supset$ e

Dans les deux cas nous avons, en utilisant exclusivement les règles que nous nous sommes données, déduit une conclusion d'une classe d'hypothèses. Nous savons déjà que nous pouvons noter:

Ex. 1 m est déduite de la classe d'hypothèses $\{ p \supset q, q \supset m, p\}$

Ex. 2 q est déduite de la classe d'hypothèses $\{p, p \supset (p \supset q)\}$

Il sera commode de noter les mêmes faits sous la forme abrégée suivante:

Ex. 1 $p \supset q, q \supset m, p \vdash m$

Ex. 2 $p, p \supset (p \supset q) \vdash q$

Examinons maintenant la façon d'introduire un signe $\supset$ et pour cela reprenons l'exemple [1]. Si quelqu'un cherche à établir la proposition conditionnelle « si le nombre n est divisible par 6, alors il est pair », il pourra procéder approximativement de la manière suivante:

1. Le nombre n est divisible par 6	hypothèse
2. $6 = 3.2$	arithmétique
3. Le nombre n est divisible par 3.2	1, 2, raisonnement
4. Le nombre n est divisible par 3 et par 2	3, arithmétique
5. Le nombre n est divisible par 2	4, raisonnement
6. Le nombre n est pair	5, définition

Introduisant alors l'hypothèse faite et la conclusion obtenue *dans une même proposition*, il dira: « *Si* le nombre n est divisible par 6, alors il est pair ».

Nous allons, quant à nous, accepter ce genre de procédure et poser, pour introduire un signe ⊃, la règle suivante:

Règle ⊃ i

```
n | | P        hyp
  | |—          .
  | |           .
m | | Q         .
  | P ⊃ Q      n–m, ⊃ i
```

Le trait vertical de gauche indique que la règle est utilisable au cours d'une déduction quelconque. Le second trait vertical découle de l'application de la règle hyp, puisque pour introduire un « ⊃ », *il faut* partir d'une hypothèse. Les petits points doivent être pensés comme indiquant les références. Mais, contrairement à ce qu'il se passait dans l'exemple, les références ne peuvent ici se faire qu'aux règles déjà posées ou à celles que nous poserons explicitement plus loin. Il faut enfin noter que la justification de la règle ⊃ i ne fait pas mention seulement du point de départ (ligne n) et du point d'arrivée (ligne m), mais *à toute la sous-déduction* qui va de n à m. D'où la notation: $n—m$.

Remarque

| On appelle *sous-déduction* d'une déduction toute suite de propositions, accompagnées d'un trait vertical à droite d'un autre.

Exemples

[1] $p \vdash q \supset p$

```
1 | p          hyp (unique élément de la classe d'hyp.)
  |—
2 |  | q       hyp (pour introduire un « ⊃ »)
  |  |—
3 |  | p       1, reit
4 | q ⊃ p      2–3, ⊃ i
```

Remarque

| Considérons la proposition p de la ligne 3. Nos écritures nous rendent attentifs à ce que p est placée sous deux hypothèses: l'hypothèse p (ligne 1)

et l'hypothèse q (ligne 2). En revanche, la même proposition p, atome de la proposition moléculaire $q \supset p$ de la ligne 4, ne dépend plus que de l'hypothèse de la ligne 1. Nous constatons ainsi qu'un des effets de la règle $\supset$ i est de *nous libérer d'une hypothèse.*

On peut alors se demander s'il ne serait pas possible, dans certains cas, de se libérer de toute hypothèse Voyons, pour cela, l'exemple suivant.

[2] $\vdash p \supset (q \supset p)$

1	p	hyp
2	q	hyp
3	p	1, reit
4	$q \supset p$	2–3, $\supset$ i (libération de l'hyp. 2)
5	$p \supset (q \supset p)$	1–4, $\supset$ i (libération de l'hyp. 1).

Remarques

1. Le trait de déduction qui est tout à gauche n'est marqué d'aucune petite barre horizontale. Donc la proposition 5 ne dépend d'aucune hypothèse. Il est vrai que, pour l'établir, nous avons dû recourir à des sous-déductions qui, elles, usaient d'hypothèses. Mais peu importe: la proposition 5 ne dépend directement d'aucune hypothèse, elle est déduite de la classe d'hypothèses vide. Nous écrirons:
soit $\varnothing \vdash p \supset (q \supset p)$ soit plus simplement $\vdash p \supset (q \supset p)$ et nous dirons, de toute proposition déductible de la classe d'hypothèses vide, qu'elle est un *théorème logique*. Sa déduction porte alors le nom de *démonstration.*
2. Le premier trait vertical est indispensable: il indique que l'on effectue une déduction à partir de la classe d'hypothèses vide. On pourrait donc écrire aussi:

1	$\varnothing$	hyp (classe vide)
2	p	hyp (pour $\supset$ i)
3	q	hyp (pour $\supset$ i)
4	p	2, reit
5	$q \supset p$	3–4, $\supset$ i
6	$p \supset (q \supset p)$	2–5, $\supset$ i

$\varnothing \vdash p \supset (q \supset p)$

[3] $\vdash p \supset p$

1	$\vert\ \vert\ p$	hyp
2	$\vert\ \vert\ p$	1, rep
3	$\vert\ p \supset p$	1–2, $\supset$ i

[4] $\vdash (p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$

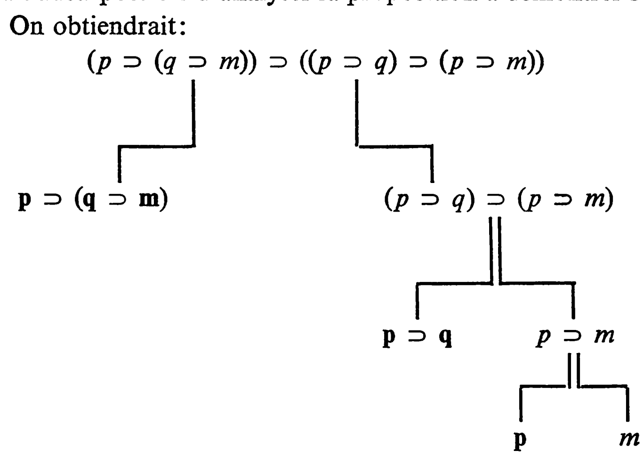
Pour trouver une démonstration de ce théorème, qui est déjà un peu compliqué, il suffit de procéder méthodiquement.

1. Comme tout théorème, il ne dépend d'aucune hypothèse, d'où le fait que le trait vertical numéro 0 n'a aucune barre horizontale.
2. Le théorème est de la forme $P \supset_1 Q$, où P a la valeur $p \supset (q \supset m)$ et il nous faudra introduire ce premier signe $\supset$. Pour cela, la règle $\supset$ i indique qu'il faut poser $p \supset (q \supset m)$ en hypothèse, en l'accompagnant d'un trait vertical (numéro 1).
3. Q a la valeur $(p \supset q) \supset (p \supset m)$, expression qui est encore de la forme $P' \supset_2 Q'$ si on donne à P' la valeur $p \supset q$. Il nous faudra donc introduire ce second signe $\supset$ et poser, pour cela, $p \supset q$ en hypothèse, en l'accompagnant d'un trait vertical (numéro 2).
4. Enfin Q' a la valeur $p \supset_3 m$. Il ne reste plus qu'à nous mettre en situation pour introduire ce troisième signe « $\supset$ ». Pour cela on pose p en hypothèse en l'accompagnant du trait vertical numéro 3.
5. Notre problème est maintenant d'utiliser les règles (et plus spécialement la règle d'élimination) pour obtenir la proposition m (ligne 8).
6. Il suffit maintenant d'appliquer trois fois de suite la règle $\supset$ i pour reconstruire le théorème de proche en proche.

0 1		
1	$\vert\ \vert\ p \supset (q \supset m)$	hyp
	—2	
2	$\vert\ \vert\ \vert\ p \supset q$	hyp
	—3	
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ p$	hyp
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ p \supset q$	2, reit
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ q$	4, 3, $\supset$ e
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ p \supset (q \supset m)$	1, reit
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ q \supset m$	6, 3, $\supset$ e
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ m$	7, 5, $\supset$ e
9	$\vert\ \vert\ \vert\ p \supset m$	3–8, $\supset$ i
10	$\vert\ \vert\ (p \supset q) \supset (p \supset m)$	2–9, $\supset$ i
11	$\vert\ (p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$	1–10, $\supset$ i

Remarques

1. Il serait aussi possible d'analyser la proposition à démontrer sous forme d'arbre. On obtiendrait:



La procédure consiste à introduire successivement, sous forme d'hypothèses, toutes les propositions qui sont les plus à gauche (ici en caractères gras), puis à chercher à obtenir (par les règles) les propositions qui ne sont pas en caractères gras.

2. Le lecteur aura intérêt à examiner attentivement cet exemple, qui est paradigmatique.

3. Cet exemple montre déjà que l'usage des parenthèses devient assez vite encombrant. Il existe une notation, dite polonaise (elle est due, en effet, à Lukasiewicz) qui dispense de toute parenthèse (voir le Fascicule 3). Quant à nous, nous nous contenterons ici, pour alléger les écritures, de remplacer parfois certaines paires de parenthèses par un simple point.

Exemple: Au lieu de $(p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$ nous écrirons, par exemple: $p \supset (q \supset m) \cdot \supset \cdot (p \supset q) \supset (p \supset m)$.

4. On remarquera que, si une proposition contient plusieurs signes $\supset$, l'un d'entre eux est « principal ». Dans le cas où la proposition est un théorème, il est lié au signe $\vdash$.

Exemple: $\vdash p \supset (q \supset p)$

C'est le premier signe $\supset$ qui est principal. Le théorème affirme donc un éconcé de la forme

$$\vdash P \supset Q$$

où P a la valeur p et Q la valeur $q \supset p$. (Cf. § 1.7).

1.4 La proposition conjonctive

Une proposition conjonctive est de la forme: *P et Q*. Nous écrirons $P \wedge Q$, ce que certains auteurs notent: P & Q, $P.Q$ ou même simplement PQ.

Supposons qu'une telle proposition, par exemple « il fait grand froid et j'ai tué six loups » soit vraie. L'usage habituel de la conjonction « et » est tel que nous entendons que « il fait grand froid » et « j'ai tué six loups » sont également deux propositions vraies. Ceci conduit à poser les deux règles d'élimination suivantes, que nous désignerons par le même sigle: $\wedge$ e.

Règles $\wedge$ e

n	$P \wedge Q$			n	$P \wedge Q$	
	—		et		—	
	P	n, $\wedge$ e			Q	n, $\wedge$ e.

Inversement d'ailleurs, dans le cas où l'on sait que les deux propositions P et Q sont vraies séparément, nous sommes disposés à affirmer que la proposition conjonctive $P \wedge Q$ est aussi vraie. D'où la règle $\wedge$ i:

Règle $\wedge$ i

n	P	
m	Q	
	- - -	
	$P \wedge Q$	n, m, $\wedge$ i.

Remarque

Ici encore les petites barres en traitillé indiquent que les propositions qui sont au-dessus sont les prémisses de la règle et que la proposition qui est au-dessous en est la conclusion.

L'emploi de ces règles est extrêmement facile. En voici quelques exemples.

Exemples

[1] $\vdash p \supset (p \wedge p)$

1	| p	hyp
	| —	
2	| p	1, rep
3	| $p \wedge p$	1, 2, $\wedge$ i
4	$p \supset (p \wedge p)$	1–3, $\supset$ i

[2] $\vdash (p \wedge p) \supset p$

1	| $p \wedge p$	hyp
	| —	
2	| p	1, $\wedge$ e
3	$(p \wedge p) \supset p$	1–2, $\supset$ i

[3] $\vdash (p \wedge q) \supset (q \wedge p)$

1	$\quad p \wedge q$	hyp
2	$\quad p$	1, $\wedge$ e
3	$\quad q$	1, $\wedge$ e
4	$\quad q \wedge p$	3,2, $\wedge$ i
5	$(p \wedge q) \supset (q \wedge p)$	1–4, $\supset$ i

Remarque: Aucune hypothèse n'a été faite, dans l'énoncé des règles, sur la relation entre n et m. Il s'ensuit qu'elles sont applicables aussi bien lorsque $n < m$ que lorsque $m < n$.

[4] $\vdash ((p \wedge q) \wedge m) \supset (p \wedge (q \wedge m))$

1	$\quad (p \wedge q) \wedge m$	hyp
2	$\quad p \wedge q$	1, $\wedge$ e
3	$\quad m$	1, $\wedge$ e
4	$\quad p$	2, $\wedge$ e
5	$\quad q$	2, $\wedge$ e
6	$\quad q \wedge m$	5, 3, $\wedge$ i
7	$\quad p \wedge (q \wedge m)$	4, 6, $\wedge$ i
8	Th.	

Remarque: Au lieu de répéter la donnée à la dernière ligne d'une démonstration, nous écrirons souvent « Th. », abréviation pour « le théorème à démontrer ».

[5] $(p \supset q) \wedge (q \supset m) \ \vdash p \supset m$

1	$(p \supset q) \wedge (q \supset m)$	hyp
2	$\quad p$	hyp
3	$\quad (p \supset q) \wedge (q \supset m)$	1, reit
4	$\quad p \supset q$	3, $\wedge$ e
5	$\quad q \supset m$	3, $\wedge$ e
6	$\quad q$	4, 2, $\supset$ e
7	$\quad m$	5, 6, $\supset$ e
8	$p \supset m$	2–7, $\supset$ i

Comme on le voit sur cet exemple, la procédure heuristique décrite à la fin du paragraphe 1.3, reste applicable ici. Après avoir pris comme hypothèses tous les antécédents possibles, on décompose entièrement les propositions pour « reconstruire » ensuite le tout.

1.5 La proposition biconditionnelle

On rencontre souvent, dans les textes scientifiques, la locution « si et seulement si » que d'aucuns abrègent en « ssi ».

Exemple : Un triangle a ses trois côtés égaux si il a ses trois angles égaux.

Un tel énoncé signifie deux choses:

1) Si un triangle a ses trois côtés égaux, il a ses trois angles égaux.
2) Si un triangle a ses trois angles égaux, il a ses trois côtés égaux.

La proposition qui contient « si et seulement si » équivaut donc à deux propositions conditionnelles. Nous la nommerons une proposition *biconditionnelle* et nous poserons la définition (notre première définition):

$$\text{Df} \equiv\ : P \equiv Q = \text{df}\ (P \supset Q) \wedge (Q \supset P).$$

Remarques

1. Au lieu du foncteur abréviatif $\equiv$, certains auteurs notent $\leftrightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.
2. Il arrive fréquemment que, au vu du contexte, le langage courant se contente de « si...alors », là où nous disons « ssi ».

Exemple: Ouvrant son porte-feuille quelqu'un dit: « Si j'ai 100 francs sur moi, je vous les prête ». Il va ici de soi que « Si je vous prête 100 francs, alors je les ai sur moi ».

Il s'ensuit que chaque fois que l'on cherche à « traduire » un texte dans le formalisme logique, il faut être attentif, non seulement à l'expression adoptée, mais à sa signification. Certains raisonnements peuvent parfaitement être corrects avec $\equiv$ et n'être pas valides avec $\supset$.

La règle repdf rend superflue l'introduction de règles spécifiques pour le foncteur $\equiv$.

Exemples

[1] Soit à démontrer le théorème $\vdash p \equiv \cdot\, p \wedge p$. Cela signifie qu'il faut démontrer $\vdash (p \supset \cdot\, p \wedge p) \wedge (p \wedge p \cdot \supset p)$:

1	| | p	hyp
2	| | p	1, rep
3	| | $p \wedge p$	1, 2, $\wedge$ i
4	| $p \supset \cdot\, p \wedge p$	1–3, $\supset$ i
5	| | $p \wedge p$	hyp
6	| | p	5, $\wedge$ e
7	| $p \wedge p \cdot \supset p$	5–6, $\supset$ i
8	| $(p \supset \cdot\, p \wedge p) \wedge (p \wedge p \cdot \supset p)$	4, 7, $\wedge$ i
9	| $p \equiv \cdot\, p \wedge p$	8, repdf $\equiv$

[2] $\vdash p \equiv p$

1	$\quad p$	hyp
2	$\quad p$	1, rep
3	$p \supset p$	1–2, $\supset$ i
4	$p \supset p$	3, rep
5	$(p \supset p) \wedge (p \supset p)$	3, 4, $\wedge$ i
6	$p \equiv p$	5, repdf $\equiv$

Pour des références ultérieures, notons encore:

[3] $\vdash p \wedge q \cdot \equiv \cdot q \wedge p$

[4] $\vdash (p \wedge q) \wedge m \cdot \equiv \cdot p \wedge (q \wedge m)$

[5] $\vdash (p \supset q \cdot \wedge \cdot q \supset p) \supset (p \equiv q)$

1.6 Théorèmes, métathéorèmes, règles dérivées

Avant d'aller plus loin, faisons le point de ce qui est déjà acquis. Nous sommes partis de *propositions* atomiques, en ce sens que, pour l'instant, nous renonçons à les analyser plus avant. Ces propositions sont vraies ou fausses et nous les désignons par des minuscules: p, q, m, etc.

Nous nous sommes aussi donnés des *foncteurs propositionnels:* $\supset$, $\wedge$ et $\equiv$, qui désignent des opérations. Cela signifie que, placés entre deux propositions (pas nécessairement atomiques d'ailleurs), ils engendrent une nouvelle proposition complexe ou, comme nous l'avons dit aussi, moléculaire.

Exemples. Si nous partons des propositions atomiques p et q, nous pourrons engendrer successivement, par exemple:

(1) $p \wedge q$
(2) $(p \wedge q) \supset p$
(3) $p \supset (p \wedge q)$.

« Se donner » des foncteurs revenait, dans le présent contexte, à poser des *règles* pour les introduire et pour les éliminer dans le cours d'une déduction. Il se trouve que, en appliquant les règles, il est parfois possible de déduire une proposition à partir d'une ou de plusieurs autres.

Exemple: La proposition q peut se déduire des deux propositions p et $p \supset q$. Nous disons aussi que q peut se déduire de la *classe d'hypothèses* $\{p, p \supset q\}$ et nous notons: $p, p \supset q \vdash q$.

Les propositions, qui sont déductibles à partir de la classe d'hypothèses vide, forment un ensemble particulier, celui des *théorèmes* du système.

Ainsi la proposition (2) ci-dessus est un théorème et nous écrivons: $\vdash (p \wedge q) \supset p$.

D'autre part, nous avons aussi introduit des majuscules P, Q, M, etc. que nous avons appelées des *variables syntaxiques* ou encore *métavariables*. Elles prennent des propositions (quelconques) comme valeurs. Comment en faire usage? Pour voir la chose clairement, prenons un exemple.

Soit la proposition (qui d'ailleurs est un théorème) « $(p \wedge q) \supset p$ ». Rien n'empêche de l'appeler P, donc de donner à la variable P la valeur $(p \wedge q) \supset p$. Mais on peut aussi remarquer que la proposition en question est une conditionnelle. Pour souligner la chose, nous pourrions l'écrire sous la forme $P \supset Q$. Dans ce cas nous attribuons à P la valeur $p \wedge q$ et à Q la valeur p. Nous pourrions aussi songer à souligner le fait que l'antécédent de cette conditionnelle est une conjonction et écrire que la proposition est de la forme $(P \wedge Q) \supset M$. Dans ce cas, P aurait la valeur p, Q la valeur q et M la valeur p. Enfin, nous pourrions vouloir marquer que le proposition p se retrouve deux fois. Cela nous conduirait à écrire: $(P \wedge Q) \supset P$.

On constate alors que la proposition $(p \wedge q) \supset p$ et l'expression $(P \wedge Q) \supset P$ ne diffèrent qu'en ce que la première s'écrit avec des minuscules (c'est une proposition du système) et la seconde avec des majuscules. Mais, comme P et Q ne sont pas des propositions, mais des variables, il serait abusif de l'appeler une proposition. Nous dirons qu'il s'agit d'une *forme propositionnelle*.

Faisons un pas de plus. Dans le cas qui nous occupe, $(p \wedge q) \supset p$ est un théorème. Nous dirons alors que la forme propositionnelle, que l'on obtient en remplaçant les minuscules par des majuscules, sous les deux conditions suivantes:

1) à une même minuscule correspond une même majuscule,

2) à deux minuscules différentes correspondent deux majuscules différentes,

est un *métathéorème*.

Il est ainsi clair que, à chacun des théorèmes que nous avons démontré, on peut faire correspondre un métathéorème.

Exemples

Théorèmes	*Métathéorèmes*
$\vdash p \supset p$	(1) $\vdash P \supset P$
$\vdash (p \supset q) \wedge (q \supset m) \cdot \supset (p \supset m)$	(2) $\vdash (P \supset Q) \wedge (Q \supset M) \cdot \supset (P \supset M)$
$\vdash (p \supset q) \wedge (q \supset p) \cdot \supset (p \equiv q)$	(3) $\vdash (P \supset Q) \wedge (Q \supset P) \cdot \supset (P \equiv Q)$
$\vdash p \equiv p$	(4) $\vdash P \equiv P$
$\vdash p \equiv q \cdot \supset \cdot q \equiv p$	(5) $\vdash P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$

$\vdash (p \equiv q) \wedge (q \equiv m) \cdot \supset (p \equiv m)$	(6) $\vdash (P \equiv Q) \wedge (Q \equiv M) \cdot \supset (P \equiv M)$
$\vdash p \equiv \cdot p \wedge p$	(7) $\vdash P \equiv \cdot P \wedge P$
$\vdash p \wedge q \cdot \equiv \cdot q \wedge p$	(8) $\vdash P \wedge Q \cdot \equiv \cdot Q \wedge P$
$\vdash (p \wedge q) \wedge m \cdot \equiv \cdot p \wedge (q \wedge m)$	(9) $\vdash (P \wedge Q) \wedge M \cdot \equiv \cdot P \wedge (Q \wedge M)$.

Un métathéorème offre l'avantage de « condenser » en lui un nombre indéfini de théorèmes. Il suffit, pour les écrire, de donner à ses variables des valeurs arbitraires en respectant la condition: *à une même variable, attribuer la même valeur.*

Exemple: le métathéorème $\vdash (P \wedge Q) \supset P$.

Variables	*Valeurs attribuées*	*Théorèmes*
P et Q	p et q	$\vdash (p \wedge q) \supset p$
P et Q	q et p	$\vdash (q \wedge p) \supset q$
P et Q	p et p	$\vdash (p \wedge p) \supset p$
P et Q	$(p \wedge q)$ et $(q \supset p)$	$\vdash (p \wedge q) \wedge (q \supset p) \cdot \supset (p \wedge q)$

Passons maintenant aux règles. La première chose à laquelle on peut songer, est de les combiner entre elles pour en obtenir de nouvelles, que nous appellerons des *règles dérivées.* Il est ainsi particulièrement commode de chercher des règles dérivées pour le foncteur $\equiv$.

1	$P \supset Q$	hyp
2	$Q \supset P$	hyp
3	$(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	1, 2, $\wedge$ i
4	$P \equiv Q$	3, repdf $\equiv$

1	$P \equiv Q$	hyp
2	P	hyp
3	$(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	1, repdf
4	$P \supset Q$	3, $\wedge$ e
5	Q	2, 3, $\supset$ e

D'où les règles:

Règle $\equiv$ i

n	$P \supset Q$	
m	$Q \supset P$	
	$P \equiv Q$	$n, m, \equiv$ i

Règle $\equiv$ e

n	$P \equiv Q$	
m	P	
	Q	$n, m, \equiv$ e

et

n	$P \equiv Q$	
m	Q	
	P	$n, m, \equiv$ e

Remarque

La seconde règle d'élimination s'obtient de façon analogue à la première. Mais on peut faire encore plus. Nos règles ont certaines propriétés que l'on peut étudier, ou mieux, dont on peut étudier les effets. Expliquons-nous sur un exemple.

Supposons qu'on ait pu démontrer deux métathéorèmes, disons $\vdash P'$ et $\vdash P' \supset Q'$. Cela signifie que nos règles nous ont permis de déduire, à partir de la classe d'hypothèses vide deux expressions de la forme P' et $P' \supset Q'$. Dans ces conditions, elles nous permettraient aussi de déduire l'expression Q' de la classe d'hypothèses vide. Pour s'en assurer, il suffit de raisonner de la façon suivante:

1. Puisque $\vdash P'$, c'est qu'on peut trouver une démonstration de P', disons en m étapes.
2. De même, puisque $\vdash P' \supset Q'$, c'est qu'on peut trouver une démonstration de $P' \supset Q'$, disons en n étapes.
3. Mettons ces deux démonstrations bout à bout et poursuivons comme il est indiqué:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & . & \\ & . & \text{Démonstration de } P' \\ & . & \\ m & P' & \\ m+1 & . & \\ & . & \text{Démonstration de } P' \supset Q' \\ & . & \\ m+n & P' \supset Q' & \\ & Q' & m,\ m+n,\ \supset \text{e} \end{array}$$

On a donc bien, sous les deux conditions $\vdash P'$ et $\vdash P' \supset Q'$, que Q' est un métathéorème, donc que $\vdash Q'$.

Cette constatation porte sur une propriété de notre système. On peut l'énoncer en disant:
Si P' est un théorème dans le système et si $P' \supset Q'$ en est aussi un, alors Q' est un théorème dans le système.

Nous appellerons *épithéorèmes* des énoncés de ce genre, qui portent *sur* la logique que nous construisons. Et nous écrirons:

Épithéorème 1: $\vdash P'$ et $\vdash P' \supset Q' \Rightarrow \vdash Q'$

Remarque
Le signe $\Rightarrow$ n'appartient pas au système, pas plus que « et » ou que $\vdash$. Il abrège un discours sur le système et est donc un métasigne.

Exemple d'application
Prenons pour P' l'expression $P \equiv Q$ et pour Q' l'expression $Q \equiv P$. Nous savons que $\vdash P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$ (métathéorème (5) de tout à l'heure). Nous pouvons donc dire:
(*) Si $\vdash P \equiv Q$ alors $\vdash Q \equiv P$.

En effet, l'épithéorème 1 suppose deux conditions:
1) $\vdash P'$, donc ici que $P \equiv Q$ soit un métathéorème.
2) $\vdash P' \supset Q'$, donc ici que $P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$ soit aussi un métathéorème.

Mais cette seconde condition est établie. Il ne reste donc plus que la condition (1). D'où l'énoncé (*) que nous pouvons écrire en abrégé:

$$\vdash P \equiv Q \Rightarrow \vdash Q \equiv P.$$

Remarque

Il est très important de noter que, si les raisonnements qui permettent d'établir et d'utiliser un épithéorème se font « logiquement », il ne saurait être question de les faire *dans* notre système. Nous sommes obligés de faire appel aux pratiques non formelles de la pensée naturelle.

Donnons encore un second exemple, qui sera utile plus loin.

Épithéorème 2: $\vdash P'$, $\vdash Q'$ et $\vdash (P' \wedge Q') \supset M' \Rightarrow \vdash M'$

Le raisonnement est analogue au précédent et nous nous bornons à l'indiquer:

1	.	
	.	Démonstration de P'
	.	
m	P'	
$m+1$	.	
	.	Démonstration de Q'
	.	
$m+n$	Q'	
$m+n+1$	.	
	.	Dém. de $(P' \wedge Q') \supset M'$
	.	
$m+n+k$	$(P' \wedge Q') \supset M'$	
$m+n+k+1$	$P' \wedge Q'$	m, $m+n$, $\wedge$ i
$m+n+k+2$	M'	$m+n+k$, $m+n+k+1$, $\supset$e

Exemple d'application

Remplaçons P' par $P \supset Q$, Q' par $Q \supset M$ et M' par $P \supset M$. Nous aurons pour $(P' \wedge Q') \supset M'$ l'expression:

$$(P \supset Q) \wedge (Q \supset M) \cdot \supset (P \supset M)$$

que nous savons être un métathéorème (exemple (2)). Nous pouvons donc conclure de l'épithéorème 2:

$$\vdash P \supset Q \text{ et } \vdash Q \supset M \Rightarrow \vdash P \supset M.$$

1.7 La relation d'implication et celle d'équivalence

Partons de la notion de proposition conditionnelle. Une telle proposition peut être vraie ou fausse comme n'importe quelle autre. Ainsi la proposition « Si X est marié, il a une seule femme légitime » est vraie en Europe, fausse dans certaines civilisations. D'autre part, une proposition peut être vraie pour diverses raisons: juridiques, physiques, logiques, etc.

Considérons alors une proposition conditionnelle qui est vraie pour des raisons logiques. Cela signifie qu'elle est un théorème, donc de la forme $\vdash P \supset Q$. Tel est, par exemple, le cas de la proposition « $p \supset (q \supset p)$ », si on pose $P =\mathrm{df}\, p$ et $Q =\mathrm{df}\, q \supset p$. Il est clair que, dans ces conditions, l'antécédent P et le conséquent Q de la conditionnelle ne sont pas quelconques. En d'autres termes, si la proposition conditionnelle $P \supset Q$ est un théorème logique, c'est qu'il existe une certaine relation entre P et Q. Nous dirons alors (et seulement alors) que P *implique* Q (certains disent: P implique matériellement Q) et nous noterons: $P \rightarrow Q$. Ceci conduit à poser:

Df $\rightarrow$: $P \rightarrow Q = \mathrm{df} \vdash P \supset Q$

soit: « P implique Q » veut dire que la proposition conditionnelle « si P alors Q » est un théorème logique.

Remarques

1. Il est très important de ne pas confondre les signes « $\rightarrow$ » et « $\supset$ ». Le premier est un signe de relation (un relateur), le second est un signe d'opération (un opérateur ou, comme nous disons, un foncteur).

L'analogie arithmétique suivante permettra de comprendre pourquoi la confusion est malheureusement facile en logique. Le signe « $<$ » est un relateur en arithmétique. On écrit, par exemple: $3 < 10$. A ceci correspond la proposition « 3 est plus petit que 10 ». Par ailleurs, on écrit aussi en arithmétique: $3 + 10$. Le signe « $+$ » est un opérateur et l'expression ne correspond pas à une proposition, mais elle désigne le nombre 13.

En logique toutefois $P \rightarrow Q$ se traduit par une proposition: « P implique Q » et $P \supset Q$ se traduit *aussi* par une proposition: « si P alors Q ». Cela n'empêche pas la distinction conceptuelle, mais elle est évidemment moins claire. On pourrait parler, comme le faisait Georges Boole (1815-1864), d'une proposition primaire pour $P \supset Q$ et d'une proposition secondaire pour $P \rightarrow Q$. La difficulté tient, en partie, à ce que les langues naturelles ne possèdent pas de moyens systématiques propres à assurer la distinction entre ces deux espèces de propositions.

Donnons à P la valeur p et à Q la valeur $q \supset p$. On a alors $\vdash P \supset Q$, soit par définition $P \rightarrow Q$. Dès lors:

1) $P \supset Q$, soit « si p alors $q \supset p$ » est une proposition qui appartient à notre système.
2) $P \rightarrow Q$, soit « p implique $q \supset p$ » est un énoncé qui appartient à la métalangue.
Et l'on voit que nous avons un moyen systématique de distinguer les propositions primaires (du système) des propositions secondaires (qui portent sur le système).

Etudions maintenant quelques unes des propriétés de cette relation d'implication.

1) *Elle est réflexive:* $P \rightarrow P$
En effet, par définition, $P \rightarrow P$ signifie $\vdash P \supset P$, ce qui est le méta-théorème (1) du § 1.6.

2) *Elle est transitive*: $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow M \Rightarrow P \rightarrow M$
Il faut donc montrer que si $\vdash P \supset Q$ et si $\vdash Q \supset M$, alors on a $\vdash P \supset M$. C'est l'exemple d'application que nous avons donné de l'épithéorème 2.

Puisque (c'est une définition reçue en algèbre) toute relation qui est à la fois réflexive et transitive est une relation de préordre, nous pouvons affirmer que l'implication est une *relation de préordre.*

D'une façon analogue, nous allons partir de la proposition biconditionnelle. Elle est de la forme $P \equiv Q$, soit P ssi Q. Si maintenant les propositions désignées par P et Q sont telles que la proposition désignée par $P \equiv Q$ est un théorème, donc si $\vdash P \equiv Q$, c'est qu'il existe entre elles une certaine relation que nous noterons $\leftrightarrow$.
Df$\leftrightarrow$: $P \leftrightarrow Q =\text{df} \vdash P \equiv Q$.
Étudions aussi cette relation.

a) *Elle est réflexive:* $P \leftrightarrow P$
Par le métathéorème (4) du § 1.6.

b) *Elle est symétrique:* $P \leftrightarrow Q \Rightarrow Q \leftrightarrow P$
Par le métathéorème (5) du § 1.6 et l'exemple d'application de l'épithéorème 1.

c) *Elle est transitive:* $P \leftrightarrow Q$ et $Q \leftrightarrow M \Rightarrow P \leftrightarrow M$
Par le métathéorème (6) du § 1.6 et l'épithéorème 1.

Il s'ensuit que, par définition, la relation est une relation d'équivalence. Les logiciens ont l'habitude de l'appeler simplement *la relation d'équivalence.* C'est donc un abus de langage, mais il est reçu.

Ceci nous permet de revenir à la relation d'implication. Nous savons déjà qu'il s'agit d'une relation de préordre. Mais elle jouit encore d'une troisième propriété.

3) *Elle est antisymétrique*: $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow P \Rightarrow P \leftrightarrow Q$
Par le métathéorème (3) du § 1.6.
On convient de dire que la relation d'implication, qui est donc réflexive, transitive et antisymétrique est une *relation d'ordre*.

Notons enfin que les métathéorèmes (7), (8) et (9) du § 1.6 peuvent s'écrire:
$P \leftrightarrow P \wedge P$: P est équivalente à $P \wedge P$,
$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$: $P \wedge Q$ est équivalente à $Q \wedge P$,
$(P \wedge Q) \wedge M \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge M)$: $(P \wedge Q) \wedge M$ est équivalente à $P \wedge (Q \wedge M)$.
Ces trois équivalences expriment des propriétés importantes du foncteur $\wedge$, à savoir que l'opération de conjonction est *idempotente*, *commutative* et *associative*.

Remarque
Il faut prendre garde de ne pas confondre les termes:
1) Réflexif, symétrique et transitif, qui désignent des propriétés de certaines *relations* et
2) Idempotent, commutatif et associatif, qui désignent des propriétés de certaines *opérations*.

1.8 Proposition disjonctive

Une proposition disjonctive est de la forme *P ou Q* et nous noterons: $P \vee Q$. Il est d'autant plus remarquable de constater que la quasi-totalité des logiciens est d'accord aujourd'hui pour utiliser le signe $\vee$ que la conjonction (grammaticale) *ou* peut avoir deux sens. Elle peut indiquer la disjonction exclusive ou le disjonction non exclusive.

1) *Disjonction exclusive*. On entend que l'une seulement des propositions est vérifiée.
Exemple: « Tu mangeras ta soupe ou tu seras privé de dessert. »

Le contexte familial et normal laisse entendre que si l'enfant mange sa soupe, il aura du dessert. C'est l'usage qui correspond au latin *aut*.

2) *Disjonction non exclusive*. Ici on admet que les deux propositions peuvent être satisfaites. Ceci correspond au latin *vel* et, en anglais scientifique, on écrit parfois *and/or*.

Exemple: « Le roi, l'âne ou moi nous mourrons », proposition qui peut se paraphraser:
« Le roi mourra ou l'âne mourra ou je mourrai », sans qu'il soit exclu que plus d'un malheur se produise.

Pour des raisons purement internes au système que nous élaborons,

et sur lesquelles nous reviendrons plus loin (Fascicule 2), nous allons nous donner des règles qui conduisent à l'interprétation non exclusive.

Supposons donc que quelqu'un ait pu établir la proposition P et donc que, en un sens naïf, P soit vraie. Dans ces conditions, $P \vee Q$ sera aussi vraie. En effet deux cas sont possibles:

1. Q est une proposition fausse. Mais le sens de *ou* est précisément d'exprimer qu'il suffit que l'une des deux propositions soit vérifiée.
2. Q est une proposition vraie. Dans ce cas les deux propositions sont vıaies, ce qui est admissible dans l'interprétation non exclusive que nous avons choisie.

Nous poserons alors:

Règle ∨ i

n	P		n	Q	
	- - -			- - -	
	$P \vee Q$	n, ∨ i		$P \vee Q$	n, ∨ i

Comme on le voit, la règle se présente sous deux formes. La première permet d'introduire une proposition à droite de celle donnée à la ligne n, la seconde d'introduire une proposition à gauche de celle donnée à la ligne n. Il ne semble pas plus nécessaire ici que dans le cas de la règle ∧e d'introduire deux sigles distincts.

Exemples

[1] $\vdash p \supset (p \vee p)$

1	p	hyp
	—	
2	$p \vee p$	1, ∨i
3	$p \supset (p \vee p)$	1–2, ⊃i

[2] $\vdash p \supset (p \vee q)$

1	p	hyp
	—	
2	$p \vee q$	1, ∨i
3	$p \supset (p \vee q)$	1–2, ⊃i

Remarque

L'exemple [1] permet d'écrire $p \rightarrow p \vee p$, soit de dire que p implique $p \vee p$. Ceci n'a rien de particulièrement choquant. En revanche, l'exemple [2] conduit à affirmer que p implique (logiquement) p ou q, soit p ou

n'importe quelle proposition. Et ce fait peut paraître plus gênant. Nous ne saurions recommander à un candidat bachelier de répondre que « toute équation du deuxième degré a deux solutions ou qu'elle en a vingt et une ». Néanmoins, la règle ∨i et l'algèbre (une équation du deuxième degré a deux solutions, réelles ou pas) s'accordent pour faire de la proposition disjonctive ci-dessus une proposition vraie. Cet exemple laisse entendre que notre façon de traiter le foncteur « ou » (et d'ailleurs les autres foncteurs logiques) ne tient aucun compte de l'information transmise par les propositions (Voir au Fascicule 2 la notion de tautologie).

Pour éliminer ∨, nous poserons en règle une pratique assez fréquente et qu'illustre l'exemple suivant.

Supposons qu'on sache d'un triangle qu'il est isocèle ou équilatéral. Nous pourrons alors raisonner ainsi:

1ère hypothèse: 1) Le triangle est isocèle
2) Il a deux angles égaux 1, raison. géom.

2e hypothèse: 3) Le triangle est équilatéral
4) Il a deux angles égaux 3, raison. géom.

Donc, puisque nous savons que le triangle en question est « isocèle ou équilatéral » et que chacun des termes de l'alternative conduit à la même conclusion, nous pouvons affirmer que ce triangle a deux angles égaux (au moins).

Nous poserons alors:

Règle ∨ e

n	$P \vee Q$	
	---	
m	| P	hyp
	| —	
	| .	
	| .	
	| .	
m'	| M	
l	| Q	hyp
	| —	
	| .	
	| .	
	| .	
l'	| M	
	M	$n, m - m', l - l'$, ∨e

Cette règle exige donc de poser successivement comme hypothèse chacun

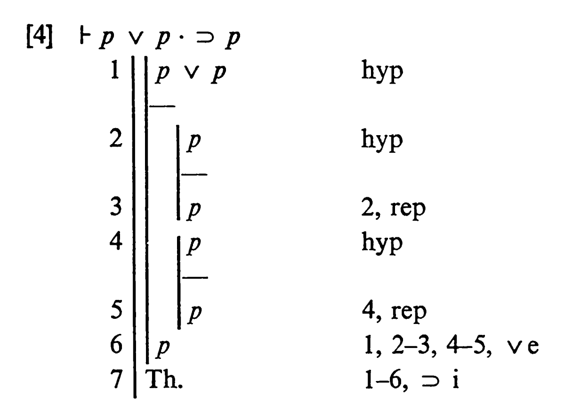
des termes de la proposition disjonctive $P \vee Q$. Elle conduit donc à faire deux sous-déductions et à tenter de déduire (par les règles du système) une même proposition M. Si on y parvient, la règle $\vee$e autorise à écrire M dans la même déduction que $P \vee Q$. Il faut noter encore que les deux sous-déductions sont indépendantes l'une de l'autre. En particulier, ni la règle rep, ni la règle reit ne permet de répéter une proposition de l'une dans l'autre.

[3] $\vdash p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p$

1	$p \vee q$	hyp (pour introduire le $\supset$)
2	p	hyp (pour éliminer le $\vee$)
3	$q \vee p$	2, $\vee$i (deuxième forme)
4	q	hyp (second terme de l'alternative)
5	$q \vee p$	4, $\vee$i (première forme)
6	$q \vee p$	1, 2–3, 4–5, $\vee$e
7	Th.	1–6, $\supset$i

Remarque

Comme on peut démontrer, de façon analogue, la réciproque de ce théorème, on peut conclure que l'opération de disjonction est commutative.



Remarques

1. Cet exemple, dont la démonstration pourrait en pratique être abrégée puisque les lignes 4 et 5 ne sont que la répétition des lignes 2 et 3, souligne assez bien l'aspect ludique du système.

2. Les exemples (1) et (4) permettent de dire que l'opération $\vee$ est idempotente.

3. On établira, en exercice, qu'elle est aussi associative.

La manipulation de la disjonction étant un peu moins facile que celle des autres opérations, nous allons encore en donner deux exemples.

[5] $\vdash p \vee (q \wedge m) \cdot \supset \cdot (p \vee q) \wedge (p \vee m)$

1	$p \vee (q \wedge m)$	hyp
2	p	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 1)
3	$p \vee q$	2, $\vee$ i
4	$p \vee m$	2, $\vee$ i
5	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	3, 4 $\wedge$ i
6	$q \wedge m$	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 1)
7	q	6, $\wedge$ e
8	m	6, $\wedge$ e
9	$p \vee q$	7, $\vee$ i
10	$p \vee m$	8, $\vee$ i
11	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	9, 10, $\wedge$ i
12	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	1, 2–5, 6–11, $\vee$ e
13	Th.	1–12, $\supset$ i

[6] $\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee m) \cdot \supset \cdot p \vee (q \wedge m)$

1	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	hyp
2	$p \vee q$	1, $\wedge$ e
3	$p \vee m$	1, $\wedge$ e
4	p	hyp (pour éliminer $\vee$ de 2)
5	$p \vee (q \wedge m)$	4, $\vee$ i
6	q	hyp (pour éliminer $\vee$ de 2)
7	$p \vee m$	3, reit
8	p	hyp (pour éliminer $\vee$ de 7)
9	$p \vee (q \wedge m)$	8, $\vee$ i
10	m	hyp (pour éliminer $\vee$ de 7)
11	q	6, reit

12	$q \wedge m$	10, 11, $\wedge$ i
13	$p \vee (q \wedge m)$	12, $\vee$ i
14	$p \vee (q \wedge m)$	7, 8–9, 10–13, $\vee$ e
15	$p \vee (q \wedge m)$	2, 4–5, 6-14, $\vee$ e
16	Th.	1--15, $\supset$ i

Remarque

L'équivalence $p \vee (q \wedge m) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee m)$ exprime la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$. On verra en exercice que la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$ peut aussi être établie.

1.9 La négation

Jusqu'ici, nous avons admis que, dans les applications, nous traiterions comme atomiques aussi bien les propositions affirmatives que les propositions négatives. Il est toutefois clair que toute proposition négative, disons Q, peut se comprendre comme la négation d'une proposition affirmative: *non-P*.

Exemples

[1] « 6 n'est pas un nombre premier », soit Q peut se comprendre comme: « non: 6 est un nombre premier », soit *non-P*.

[2] « Il n'y a pas de roses sans épines » peut se comprendre comme: « non: il y a des roses sans épines ».

Le mot « non » joue encore le rôle d'un foncteur propositionnel, mais c'est un *foncteur unaire*, en ce sens qu'il s'applique à une seule proposition. Il désigne l'opération qui transforme une proposition P en sa négation *non-P*. Nous noterons $\sim P$, ce que d'autres écrivent aussi $\neg P$ ou $\overline{P}$ ou P'.

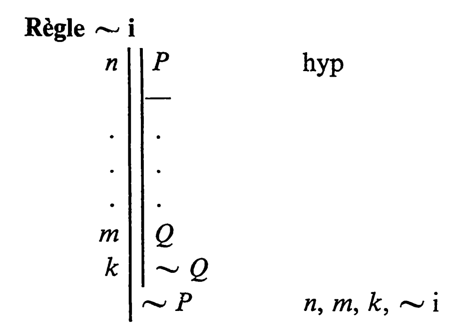
Il est facile de voir que la négation joue un rôle privilégié en logique. On peut tout d'abord s'assurer sur soi-même qu'il n'est pas immédiat que la négation de « il est bête et méchant » soit « il n'est pas bête *ou* il n'est pas méchant ». On peut aussi constater que des logiques, comme la logique intuitionniste ou la logique minimale, diffèrent avant tout de la logique classique par l'usage qu'elles font de la négation. Ceci suffit déjà à expliquer pourquoi nous allons procéder en plusieurs étapes et examiner chaque fois la portée des règles introduites.

Règle $\sim$ i

Commençons par poser que, si une proposition P, prise comme hypothèse, conduit à une contradiction — c'est-à-dire qu'il est possible d'en déduire

une proposition Q et la négation de Q — alors c'est $\sim P$ qu'il faut affirmer. Cela nous donne:

Règle $\sim$ i



Remarques

1. Il s'agit ici d'une règle qui codifie, dans notre système, le raisonnement par l'absurde: toute proposition qui conduit à une contradiction doit être niée.
2. Cette règle est très proche de la règle $\supset$ i, en ce sens qu'elle permet de se libérer d'une hypothèse. Toutefois la référence se fait aux seules propositions n, m et k et non à toute la sous-déduction.
3. Cette règle se propose d'introduire un signe « $\sim$ », de même que la règle $\supset$ i, par exemple, servait à introduire un signe « $\supset$ ». Il y a cependant ici un élément qui peut paraître paradoxal. Si l'on convient de considérer que toute la sous-déduction n–k constitue la prémisse de la règle, on constate que la prémisse contient nécessairement une mention du signe « $\sim$ » que la règle a pour but d'introduire!

Il est clair que le « $\sim$ » qui précède la proposition de la ligne k ne saurait, sans cercle vicieux, être introduit par la règle. Il faut donc en conclure qu'il ne peut y figurer que s'il est préalablement contenu dans l'hypothèse P. En conséquence, notre système ne permet de traiter de la négation que dans la mesure où nous prenons nous-mêmes en considération (pour en examiner les conséquences) des propositions elles-mêmes négatives. Cette sorte de restriction est liée à l'adage que, en logique, le vrai ne peut conduire au faux.

Exemples

[1] $\vdash (p \supset q) \wedge (p \supset \sim q) \cdot \supset \sim p$

1	$(p \supset q) \wedge (p \supset \sim q)$	hyp (pour $\supset$ i)
2	p	hyp (pour $\sim$ i)

3	$(p \supset q) \wedge (p \supset \sim q)$	1, reit
4	$p \supset q$	3, $\wedge$ e
5	$p \supset \sim q$	3, $\wedge$ e
6	q	2, 4, $\supset$ e
7	$\sim q$	2, 5, $\supset$ e
8	$\sim p$	2, 6, 7, $\sim$ i
9	Théorème	1–8, $\supset$ i

[2] $\vdash p \supset \sim\sim p$

1	p	hyp (pour $\supset$ i)
2	$\sim p$	hyp (pour $\sim$ i)
3	p	1, reit
4	$\sim p$	2, rep
5	$\sim\sim p$	2, 3, 4, $\sim$ i
6	Théorème	1–5, $\supset$ i

Remarques

1. Il faut se garder de conclure que, puisque l'hypothèse $\sim p$ conduit à une contradiction, c'est p qui est la proposition correcte. Nous n'avons, pour le moment, aucune règle qui nous permette d'éliminer une négation.
2. L'exemple [2] permet d'écrire le métathéorème: $\vdash P \supset \sim\sim P$. On aura donc l'implication $P \rightarrow \sim\sim P$, qui est une partie du principe classique de la double négation.
3. Rien n'empêche aussi de s'en tenir (avec P à la place de p) aux cinq première lignes de l'exemple [2] et de conclure à la règle dérivée suivante que nous désignerons par neg $\sim$ i (introduction « négative » de $\sim$):

Règle neg $\sim$ i

n	P	

	$\sim\sim P$	n, neg $\sim$ i

[3] $p, \sim p \vdash \sim q$

1	p	hyp (les éléments de la classe d'hypothèses.)
2	$\sim p$	
3	q	hyp (pour $\sim$ i)
4	p	1, reit

5	$\vert\ \vert \sim p$	2, reit
6	$\vert \sim q$	3, 4, 5, $\sim$ i

Remarques

1. Nous pouvons tirer de l'exemple [3] la règle (provisoire) suivante:

Règle N

n	P	
m	$\sim P$	
	- - -	
	$\sim Q$	n, m, N

2. On entend volontiers dire qu'« une contradiction conduit à n'importe quoi ». Ce que nous pouvons toutefois établir pour l'instant, c'est que: $P \wedge \sim P \cdot \rightarrow \sim Q$. En effet, cette implication signifie que $\vdash P \wedge \sim P \cdot \supset \sim Q$, métathéorème qui découle immédiatement de la règle N. Nous pouvons donc, quant à nous, dire: « une contradiction conduit à la négation de n'importe quelle proposition ».

Dérivons maintenant directement trois nouvelles règles:

Règle neg $\wedge$ **i** (pour introduire une conjonction précédée d'une négation)

1	$\sim P \vee \sim Q$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\vert\ P \wedge Q$	hyp (pour $\sim$ i)
3	$\vert\ P$	2, $\wedge$ e
4	$\vert\ Q$	2, $\wedge$ e
5	$\vert\ \sim P \vee \sim Q$	1, reit
6	$\vert\ \vert\ \sim P$	hyp (pour $\vee$ e)
7	$\vert\ \vert\ P$	3, reit
8	$\vert\ \vert\ Q$	4, reit
9	$\vert\ \vert\ \sim Q$	6, 7, N
10	$\vert\ \vert\ Q \wedge \sim Q$	8, 9, $\wedge$ i
11	$\vert\ \vert\ \sim Q$	hyp (pour $\vee$ e)
12	$\vert\ \vert\ Q$	4, reit
13	$\vert\ \vert\ Q \wedge \sim Q$	11, 12, $\wedge$ i
14	$\vert\ Q \wedge \sim Q$	5, 6–10, 11–13, $\vee$ e
15	$\vert\ Q$	14, $\wedge$ e
16	$\vert\ \sim Q$	14, $\wedge$ e
17	$\sim (P \wedge Q)$	2, 15, 16, $\sim$ i

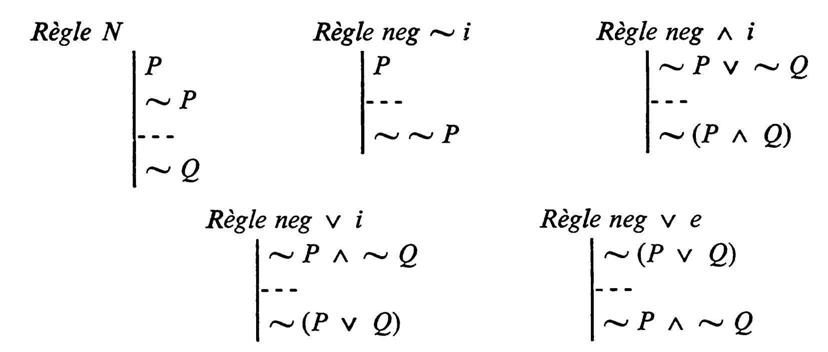
Règle neg $\vee$ **i** (pour introduire une disjonction précédée d'une négation)

1	$\mid {\sim} P \wedge {\sim} Q$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid \mid P \vee Q$	hyp (pour ${\sim}$ i)
3	$\mid \mid {\sim} P \wedge {\sim} Q$	1, reit
4	$\mid \mid {\sim} P$	3, $\wedge$ e
5	$\mid \mid {\sim} Q$	3, $\wedge$ e
6	$\mid \mid \mid P$	hyp (pour $\vee$ e)
7	$\mid \mid \mid {\sim} P$	4, reit
8	$\mid \mid \mid {\sim} (P \vee Q)$	6, 7, N (on choisit $P \vee Q$ comme propo-
9	$\mid \mid \mid Q$	hyp sition quelconque que l'on nie)
10	$\mid \mid \mid {\sim} Q$	5, reit
11	$\mid \mid \mid {\sim} (P \vee Q)$	9, 10, N
12	$\mid \mid {\sim} (P \vee Q)$	2, 6–8, 9–11, $\vee$ e
13	$\mid \mid P \vee Q$	2, rep
14	$\mid {\sim} (P \vee Q)$	2, 12, 13, ${\sim}$ i

Règle neg $\vee$ e (pour éliminer une disjonction prédédée d'une négation)

1	$\mid {\sim} (P \vee Q)$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid \mid P$	hyp
3	$\mid \mid P \vee Q$	2, $\vee$ i
4	$\mid \mid {\sim} (P \vee Q)$	1, reit
5	$\mid {\sim} P$	2, 3, 4, ${\sim}$ i
6	$\mid \mid Q$	hyp
7	$\mid \mid P \vee Q$	6, $\vee$ i
8	$\mid \mid {\sim} (P \vee Q)$	1, reit
9	$\mid {\sim} Q$	6, 7, 8, ${\sim}$ i
10	$\mid {\sim} P \wedge {\sim} Q$	5, 9, $\wedge$ i

Faisons maintenant le point de la situation. Si nous ajoutons aux règles générales et aux règles pour les foncteurs $\supset$, $\wedge$ et $\vee$ la règle ${\sim}$ i, nous pouvons dériver les règles suivantes:



Les deux règles neg ∨ i et neg ∨ e constituent l'une des lois de Morgan. Il est tentant de se demander si l'on ne pourrait pas encore dériver la règle neg ∧ e (avec neg ∧ i, nous obtiendrions l'autre loi de Morgan) et la règle neg ∼ e (avec neg ∼ i nous aurions la loi de double négation). En fait on peut montrer, par des considérations métathéoriques que nous ne rapporterons pas, que la chose n'est pas possible. Cela signifie que nous ne disposons, pour le moment, que d'une forme faible de la négation. On l'appelle parfois la *réfutabilité* et la logique obtenue équivaut à *la logique* dite *minimale* de Johansson (1936). (On trouvera des compléments d'information dans le Fascicule 3).

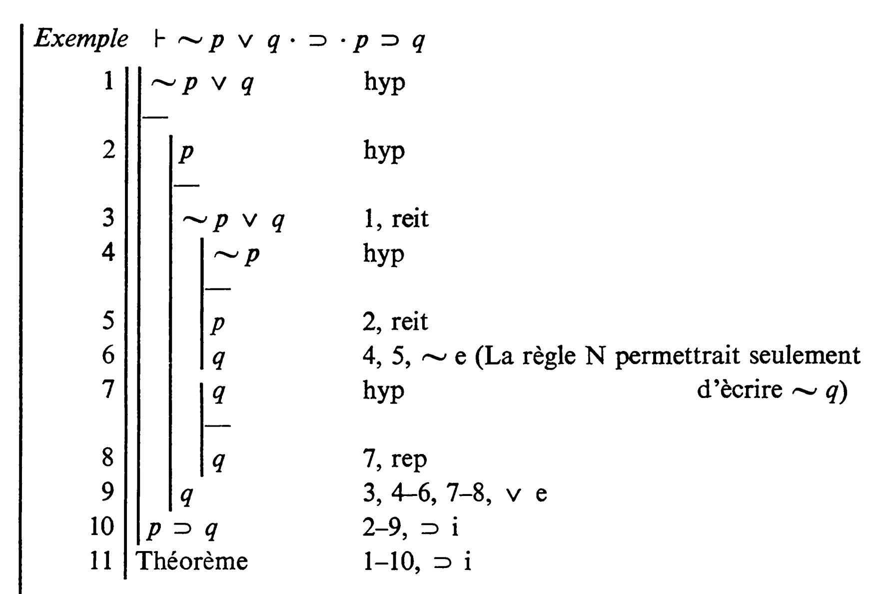
Comme la limitation fondamentale réside en ce que la règle N ne nous permet que d'arriver à une proposition négative ∼ *Q*, nous allons renforcer notre négation en introduisant l'équivalent du principe fameux: *ex falso quodlibet sequitur*. Nous poserons donc la nouvelle règle suivante:

Règle ∼ e

n	*P*	
m	∼ *P*	
	- - -	
	Q	*n*, *m*, ∼ e

Remarques

1. Il est évidemment un peu abusif de considérer cette règle comme une règle d'élimination. La proposition *Q* de la conclusion peut fort bien désigner une proposition qui commence par une négation. Il est cependant commode d'adopter cette terminologie pour des raisons de symétrie.
2. Cette règle dispense de la règle *N*, en ce sens que toute déduction qui faisait usage de la règle *N* peut être refaite en utilisant la règle ∼ e.
3. Cette nouvelle règle est cependant plus forte que la règle *N*, ce qui signifie qu'elle permet de démontrer de nouveaux théorèmes.



Exemple $\vdash \sim p \vee q \cdot \supset \cdot p \supset q$

1	$\sim p \vee q$	hyp
2	p	hyp
3	$\sim p \vee q$	1, reit
4	$\sim p$	hyp
5	p	2, reit
6	q	4, 5, $\sim$ e (La règle N permettrait seulement
7	q	hyp d'ècrire $\sim q$)
8	q	7, rep
9	q	3, 4–6, 7–8, $\vee$ e
10	$p \supset q$	2–9, $\supset$ i
11	Théorème	1–10, $\supset$ i

4. Il est toutefois remarquable que nous ne puissions encore ni déduire les règles neg $\sim$ e, neg $\wedge$ e, ni la réciproque du théorème ci-dessus. Examinons, par exemple, ce que donnerait une tentative de démontrer: $p \supset q \cdot \supset \cdot \sim p \vee q$.

1	$p \supset q$	hyp
2	$\sim (\sim p \vee q)$	hyp (pour $\sim$ i)
3	$\sim \sim p \wedge \sim q$	2, neg $\vee$ e
4	$\sim \sim p$	3, $\wedge$ e
5	$\sim q$	3, $\wedge$ e
6	$p \supset q$	1, reit

On voit que, si l'on pouvait passer de $\sim \sim p$ à p, il serait possible d'éliminer $\supset$ grâce à la ligne 6. Cela conduirait à q et, en présence de $\sim q$ (ligne 5), nous aurions la contradiction souhaitée. En fait nous pourrions écrire alors $\sim \sim (\sim p \vee q)$ et il faudrait, une nouvelle fois, éliminer une double négation.

Il s'ensuit que nous disposons maintenant d'un nouveau type de négation, plus fort que la réfutabilité mais pas encore « complet » au sens classique. Cette négation se nomme volontiers l'*absurdité* et le système obtenu en ajoutant aux règles de la logique minimale la règle $\sim$ e équivaut à la *logique intuitionniste* de Heyting (1930).

Pour terminer, donnons-nous la règle neg $\sim$ e:

Règle neg $\sim$ e

n	$\sim\sim P$	

	P	n, neg $\sim$ e

Nous venons d'esquisser la preuve qu'il est maintenant possible de démontrer $\vdash p \supset q \cdot \supset \cdot \sim p \vee q$, ce qui permet d'affirmer que $\sim p \vee q$ est équivalent à $p \supset q$. Il est aussi facile de déduire la règle neg $\wedge$ e qui manquait:

Règle neg $\wedge$ e

n	$\sim(P \wedge Q)$	

	$\sim P \vee \sim Q$	n, neg $\wedge$ e

En effet:

1	$\sim(P \wedge Q)$	hyp
2	| $\sim(\sim P \vee \sim Q)$	hyp
3	| $\sim\sim P \wedge \sim\sim Q$	2, neg $\vee$ e
4	| $\sim\sim P$	3, $\wedge$ e
5	| P	4, neg $\sim$ e
6	| $\sim\sim Q$	3, $\wedge$ e
7	| Q	6, neg $\sim$ e
8	| $P \wedge Q$	5, 7, $\wedge$ i
9	| $\sim(P \wedge Q)$	1, reit
10	$\sim\sim(\sim P \vee \sim Q)$	2, 8, 9, $\sim$ i
11	$\sim P \vee \sim Q$	10, neg $\sim$ e

Le système engendré par les règles suivantes: règles générales, règles pour $\supset$, $\vee$, $\wedge$, règles $\sim$ i, $\sim$ e et neg $\sim$ e conduit à la *logique classique des propositions*. Le métathéorème suivant, dit principe du tiers exclu, en est caractéristique:

$$\vdash P \vee \sim P.$$

Preuve

1	| $\sim(P \vee \sim P)$	hyp (pour $\sim$ i)
2	| $\sim P \wedge \sim\sim P$	1, neg $\vee$ e
3	| $\sim P$	2, $\wedge$ e
4	| $\sim\sim P$	2, $\wedge$ e
5	$\sim\sim(P \vee \sim P)$	1, 3, 4, $\sim$ i
6	$P \vee \sim P$	5, neg $\sim$ e

Remarques

1. Ainsi qu'on peut le constater, la ligne 5 s'obtient à l'aide de règles qui sont déjà disponibles en logique minimale. C'est donc bien l'élimination de la double négation qui est caractéristique de la logique classique.
2. Glivenko (1929), comparant la logique intuitionniste I et la logique classique C, a pu établir l'épithéorème suivant:

   Si $\vdash_C P$ alors $\vdash_I \sim\sim P$ et réciproquement.
3. En résumé, nous avons la suite de systèmes logiques suivante, suite dans laquelle tout théorème d'un système à gauche d'une flèche est aussi théorème des systèmes à droite, sans que la réciproque soit vraie:

Règles générales Règles $\supset$ i, $\supset$ e, $\wedge$ i, $\wedge$ e, $\vee$ i, $\vee$ e	+ Règle $\sim$ i	+ Règle $\sim$ e	+ Règle neg $\sim$ e
L. positive →	L. minimale →	L. intui- → tionniste	L. classique
Pas de nég.	Réfutabilité	Absurdité	Négation

4. Le lecteur vérifiera qu'en logique classique il est possible de dériver les deux règles suivantes, qui sont très commodes à l'usage:

Règle neg $\supset$ i

n	$P \wedge \sim Q$	

	$\sim(P \supset Q)$	n, neg $\supset$ i

Règle neg $\supset$ e

n	$\sim(P \supset Q)$	

	$P \wedge \sim Q$	n, neg $\supset$ e

DEUXIÈME PARTIE

LA LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

L'USAGE NAÏF DES QUANTIFICATEURS

2.1 L'analyse des propositions

Il convient maintenant de procéder à l'analyse des propositions, considérées jusqu'à maintenant comme des atomes. Partons pour cela d'un exemple:

(1) Jules est hercule et Cyprien est musicien

Le calcul des propositions (inanalysées) nous permettait de poser, en guise d'abréviation:

p = df Jules est hercule q = df Cyprien est musicien

et d'écrire pour rendre compte de (1):

(2) $p \wedge q$.

Mais la proposition p comporte un *sujet* (Jules) et un *prédicat* (être hercule). De même la proposition q peut être conçue comme comportant un sujet (Cyprien) et un prédicat (être musicien).

Dans le cirque en question, nous sommes en présence d'un certain nombre d'individus et d'un certain nombre de prédicats. Il est bien évident que notre intention n'est pas de construire une logique à l'usage exclusif des gens du voyage. Toutefois, quel que soit le domaine de réalité que nous voudrons considérer, nous nous trouverons toujours devant *un ensemble d'objets ou d'individus* Ω et devant *un ensemble de prédicats* Π.

Les éléments de Ω pourraient être, dans les cas finis, désignés explicitement: $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$. Les x_i seraient des constantes d'objets (d'individus). Certains systèmes logiques introduisent de telles constantes, d'autres ne le font pas. Mais, dans les deux types de systèmes, il est indispensable de disposer de variables qui prennent leurs valeurs sur Ω. Nous utiliserons, quant à nous, les lettres x, y, z, ... et nous les nommerons des *variables d'objets ou d'individus*.

La situation pour les prédicats est analogue et nous avons besoin de variables qui prennent leurs valeurs sur Π. Nous n'introduirons pas de

constantes de prédicats et nous nous contenterons, dans les exemples, de spécifier quelle valeur prend telle ou telle variable. Ainsi nous pourrons dire que a prend la valeur « être hercule » et b la valeur « être musicien ».

Remarque

Le lecteur aura vu que ce qu'on nomme traditionnellement *la copule*, et qui s'exprime par le verbe « être », a été intégré ici dans le prédicat. Il s'ensuit que l'exemple (1) pourra s'écrire avec nos conventions et en posant $x_1 = \text{df Jules}$, $x_2 = \text{df Cyprien}$:

(3) $ax_1 \wedge bx_2$.

On écrit d'abord le prédicat puis le sujet: « est hercule Jules *et* est musicien Cyprien ». Toutefois la formule (3) se lit dans l'ordre de l'écriture.

Il est pratique, quoique nullement nécessaire, de distinguer deux sortes de prédicats. Prenons l'exemple suivant:

(4) Jules est moins bien payé que Cyprien.

Nous avons ici deux constantes d'individus x_1 et x_2 et un prédicat qui les met en relation l'une avec l'autre: « être moins bien payé que ». Convenons alors d'introduire deux espèces de variables de prédicats:

Variables de prédicats qui portent sur une seule variable d'individu: $a, b, c, \dots$

Variables de prédicats qui portent sur deux, ou plus de deux, variables d'individus: $r, s, t, \dots$

Ces dernières seront dites, pour faire bref, des *variables de relations*.

Remarque

Si r prend la valeur « être moins bien payé que », il serait naturel de traduire (4) par:

(5) $x_1\, rx_2$.

Toutefois, par analogie avec l'écriture ax_1 et pour tenir compte aussi des relations entre plus de deux termes, nous conviendrons de toujours écrire *d'abord la variable de prédicat* puis la ou les variables (éventuellement constantes) d'individus. Nous aurons donc:

(6) $rx_1\, x_2$.

Considérons, pour terminer, un exemple complet. Soit la proposition:

« x_1 et x_2 et x_3 sont trois points de la droite x_4 et x_2 est entre x_1 et x_3 ».

Prenons pour domaine d'objets Ω l'ensemble des êtres géométriques et posons:

a: être un point	*b:* être une droite
r: être situé sur	*s:* être entre ... et ...

Il vient:

$ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3 \wedge bx_4 \wedge rx_1x_4 \wedge rx_2x_4 \wedge rx_3x_4 \wedge sx_2x_1x_3$.

2.2 Fonctions propositionnelles et quantificateurs

Supposons que Ω soit l'ensemble des nombres naturels. Si a désigne le prédicat « être un nombre premier », l'écriture $a3$ correspondra à la proposition vraie « 3 est un nombre premier ». Qu'en est-il alors de l'expression ax?

x est une variable qui prend ses valeurs sur Ω, mais l'expression « x est un nombre premier » ne saurait pour autant être considérée comme une proposition. On ne peut en effet décider si elle est vraie ou si elle est fausse, puisque tout va dépendre de la valeur que prendra x. Si x prend la valeur 3, l'expression est vraie et nous retrouvons notre proposition $a3$. Si x prend la valeur 6, nous aurons l'expression $a6$ qui est fausse, mais qui est une proposition.

D'une façon générale, une expression, construite à l'aide de variables de prédicats (ou de relations) et qui contient au moins une variable d'individus, est dite une *fonction propositionnelle.*

Exemples

$$ax \vee by;\ rxy \supset ryx;\ ax \wedge bx \cdot \supset \cdot bx$$

Remarque

Comme nous allons le voir, il faudrait pour être correct et complet, dire qu'une fonction propositionnelle se reconnaît à ceci qu'elle contient au moins une variable d'individu *libre.*

Nous connaissons déjà une façon de transformer une fonction propositionnelle en proposition: remplacer les variables d'individus (libres) qu'elle contient par des constantes d'individus. Il existe cependant deux autres procédés.

I. Partons de la fonction propositionnelle « x est un nombre premier » et considérons l'expression:

tout x est un nombre premier.

« Tout x » signifie ici, en vertu du choix de Ω, « tout nombre naturel » ou « tous les nombres naturels ». L'énoncé en question est manifestement faux, mais ceci suffit à faire voir que « tout x est un nombre premier » est une proposition. On pourrait dire aussi:

pour tout x, x est un nombre premier

et écrire:

pour tout x, ax.

Convenons de poser $\forall x$ au lieu de « pour tout x ». On aura:

$\forall x$, ax.

Mais, comme les virgules ne font pas partie des signes de notre système,

nous utiliserons les parenthèses dont nous disposons déjà et écrirons finalement:

$(\forall x)\ ax.$

II. Reprenons la fonction propositionnelle « x est un nombre premier ». Il est clair que l'expression:

quelque x (au moins) est un nombre premier

est vraie et que, en conséquence, c'est une proposition. Nous pourrons dire aussi:

il y a un x (au moins), tel que x est un nombre premier

et écrire:

il y a un x (au moins), tel que ax.

Convenons de poser $\exists x$ pour « il y a un x (au moins) » et nous obtenons finalement:

$(\exists x)\ ax.$

Nous venons d'enrichir nos notations de deux signes nouveaux: $\forall$ et $\exists$. Ce sont des quantificateurs: le premier est dit *quantificateur universel* et le second *quantificateur particulier ou existentiel.*

Remarque

Les quantificateurs ne portent que sur des variables d'individus et c'est ce qui caractérise la logique des prédicats *du premier ordre*. Une logique dans laquelle les variables de prédicats peuvent aussi être quantifiées, est une logique du deuxième ordre.

Ainsi, si $=$ désigne la constante de prédicat « être identique à », il est possible d'écrire dans la logique du 1er ordre:

quelle que soit la variable a:

$(\forall x)\ (\forall y)\ (x{=}y \cdot \supset \cdot ax \supset ay).$

Dans une logique du 2e ordre on pourrait écrire:

$(\forall a)\ (\forall x)\ (\forall y)\ (x{=}y \cdot \supset \cdot ax \supset ay).$

2.3 Variables libres et variables liées

Remarquons d'abord que, grâce au jeu des parenthèses, la *portée* ou le *champ* d'un quantificateur peut toujours être exactement déteιminé.

Exemples

[1] Il existe des livres savants et ennuyeux.

Posons: $\Omega = \{\text{écrits}\}$ $a =$ être un livre $b =$ être savant

$c =$ être ennuyeux

Il vient: $(\exists x)\ (ax \wedge bx \wedge cx).$

[2] Il existe des livres savants et il en existe d'ennuyeux.
Avec les mêmes conventions, il vient:

$$(\exists x)\,(ax \wedge bx) \wedge (\exists x)\,(ax \wedge cx).$$

[3] Tout effet a une cause.
Posons: $\Omega = \{\text{phénomènes}\}$ $\quad a =$ être un effet $\quad r =$ être cause de
Il vient: $(\forall x)\,(ax \supset (\exists y)\, ryx)$

[4] Il existe un nombre naturel plus petit ou égal à tout autre.
Posons: $\Omega = \{\text{nombres}\}$ $\quad a =$ être un nombre naturel
$r =$ être plus petit ou égal à
Il vient: $(\exists x)\,(\forall y)\,(ax \wedge ay \cdot \supset rxy)$.

De plus, à côté des propositions nous aurons aussi affaire à des formes propositionnelles, c'est-à-dire à des expressions du genre:

[5] $(\exists x)\, ax \wedge by$

[6] $(\forall x)\,(rxy \supset (\exists y)\, rxy)$

[7] $(\forall x)\, rxy \supset (\exists y)\, rxy$

Il convient alors de distinguer les variables qui sont dans le champ d'un quantificateur et les autres. Toute variable, qui est dans le champ d'un quantificateur en son nom, est dite *liée*. Les autres sont *libres*.

Remarque:
Toutes les variables d'une proposition sont liées (Exemples [1] à [4]). Dans l'exemple [5], x est liée par $(\exists x)$ et y est libre. Dans l'exemple [6], les deux mentions de x sont liées par $(\forall x)$, la première mention de y est libre et la seconde est liée par $(\exists y)$. Dans l'exemple [7] enfin, la première mention de x est liée par $(\forall x)$, la seconde est libre, la première mention de y est libre et la seconde est liée par $(\exists y)$.

Reprenons maintenant l'exemple [3]. Nous avions:

$$(\forall x)\,(ax \supset (\exists y)\, ryx)$$

Toutes les mentions des variables x et y sont liées, mais il est clair que nous aurions obtenu une formulation équivalente de la proposition « Tout effet a une cause » en écrivant:

$$(\forall z)\,(az \supset (\exists t)\, rtz)$$

ou $\quad (\forall y)\,(ay \supset (\exists x)\, rxy)$

ou même $(\forall \ulcorner\ )\,(a \ulcorner \supset (\exists \llcorner\ )\, r \lrcorner\ \urcorner\ )$.

Il en va de même dans l'écriture algébrique. Ainsi peut-on écrire la même loi fameuse:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ou $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ou même (de préférence en l'absence des mathématiciens!): $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Tout ceci montre que le nom d'une variable liée n'importe pas, qu'il s'agit comme on disait autrefois, d'*une variable apparente*. Nous en tirerons profit pour considérer parfois qu'une expression qui ne contient *que* des variables liées est une expression sans variable. Et elle est, en effet, sans véritable variable.

2.4 Les matériaux du système

Nous allons élaborer notre système à l'aide d'un certain nombre de signes et de lettres.

Les signes

Ce seront les signes $\supset$, $\wedge$, $\equiv$, $\vee$, $\sim$ que nous avons introduits dès le chapitre I et pour lesquels nous avons des règles d'introduction et d'élimination.

De plus, nous aurons les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$, pour la manipulation desquels il va s'agir de nous donner des règles.

Enfin nous avons des parenthèses et éventuellement des points que nous traiterons de nouveau de façon non formelle.

Les lettres

Nous en aurons de plusieurs espèces:

$x, y, z, \ldots$ variables d'individus ou d'objets

$a, b, c, \ldots$ } variables de prédicats < à proprement parler:
$r, s, t, \ldots$ } variables de prédicats < de relations

On peut se demander ce que deviennent les lettres p, q, m, ... qui nous servaient à abréger les propositions. Deux attitudes sont ici possibles:

1. N'en plus faire usage, puisque nous sommes à même maintenant d'analyser les propositions.
2. Les conserver comme abréviations pour les cas où nous n'aurons pas envie de tout expliciter.

Il sera commode d'adopter la seconde attitude.

Variables syntaxiques ou métavariables

Commençons par examiner quelles sont les expressions que nous pouvons former dans le système. Il y en a de deux sortes:

1. *Expressions atomiques*, par exemple: ax, by, rxy, $sxyz$, ...
2. *Expressions moléculaires*, qui sont celles que l'on peut former à partir des expressions atomiques à l'aide des foncteurs propositionnels et des quantificateurs. Par exemple: $\sim ax$, $ax \wedge by$, $rxy \supset \sim ax$, $(\forall x)\, ax$, $(\exists y)\, rxy$, $(\forall x)(\exists y)(ax \vee by)$, ...

Nous avons besoin de métavariables qui prendront leurs valeurs sur cet ensemble d'expressions atomiques et moléculaires. Nous utiliserons pour cela les lettres: A, B, C, ... et éventuellement P, Q, M, ... lorsque nous voudrons insister sur le fait que l'expression considérée est une proposition (ne contient pas de variable libre).

Exemple: L'expression du système $(\forall x)$ $(\exists y)$ $(ax \supset by)$ pourra être désignée par A (ou par P, puisque c'est une proposition).

On voit cependant que l'information transmise est assez faible. Elargissons donc nos conventions métalinguistiques.

Il peut être souhaitable de noter que l'expression considérée commence par un quantificateur, au nom d'une certaine variable, qu'elle se continue par un second quantificateur, au nom d'une autre variable, etc... Nous utiliserons les lettres X, Y, Z pour désigner les variables d'objets. Ce sont donc des métavariables et nous noterons par exemple:

$(\forall X)$ $(\exists Y)$ A pour $(\forall x)$ $(\exists y)$ $(ax \supset by)$ et pour toute expression de la même forme: $(\forall y)$ $(\exists x)$ $(ax \wedge by)$, $(\forall z)$ $(\exists u)$ $(az \wedge bu \cdot \supset au)$, etc...

Si nous voulons encore indiquer que l'expression qui est quantifiée contient les variables appelées *X et Y*, nous noterons:

$$(\forall X) (\exists Y) A (X, Y)$$

On a donc:

$(\forall X)$ $(\exists Y)$ A (X, Y) peut désigner par exemple:

$(\forall x)$ $(\exists y)$ $(ax \supset by)$	ici X est x, Y est y et A (X, Y) est $ax \supset by$
$(\forall y)$ $(\exists x)$ $(ax \wedge by)$	X est y, Y est x et A (X, Y) est $ax \wedge by$
$(\forall z)$ $(\exists u)$ $(az \wedge by \cdot \supset au)$	X est z, Y est u et A (X, Y) est $az \wedge by \cdot \supset au$

Remarques

1. Nous avions déjà exploité au Ch. I la possibilité d'exprimer de plusieurs façons différentes dans la métalangue une même expression de la langue. Ainsi « $p \wedge q \cdot \supset p$ » peut se représenter par:

P: on indique seulement qu'il s'agit d'une proposition;

$P \supset Q$: on indique qu'on a une conditionnelle;

$P \wedge Q \cdot \supset M$: on précise que l'antécédent est une conjonction;

$P \wedge Q \cdot \supset P$: on indique que la première proposition de la conjonction est la même que le conséquent.

On aura maintenant, par exemple, pour $(\forall x)$ $(\exists y)$ $(ax \supset \cdot by \wedge cy)$:

A ou P: on indique qu'il s'agit d'une proposition;

$(\forall X)$ A: on précise que l'expression commence par un quantificateur universel;

$(\forall X)$ $(\exists Y)$ A: on ajoute encore qu'elle continue par un quantificateur existentiel;

$(\forall X)$ $(\exists Y)$ A (X, Y): on indique enfin quelles variables figurent dans l'expression quantifiée.
2. Les majuscules désignent des minuscules, mais cela n'implique pas qu'elles soient de même nom. Ainsi X peut désigner x, y, z, u, etc.
3. Dans une même expression une même majuscule ne peut pas désigner deux minuscules différentes.

2.5 Le quantificateur universel

Notre problème est maintenant de poser les règles, ∀i et ∀e, pour introduire et pour éliminer un quantificateur universel, de telle sorte que l'interprétation qu'on en pourra donner corresponde, aussi bien que possible, avec l'idée habituelle de « tous ».

Pour cela, plaçons-nous dans le cas où le domaine d'individus Ω est fini. Supposons par exemple que $\Omega = \text{df}\ \{x_1, x_2, x_3\}$.

Si a est un prédicat et que ce prédicat soit satisfait par x_1, x_2 et x_3, on pourra dire « pour tout x (de Ω), ax ». Donc on aurait:

$$(\forall x)\ ax = \text{df}\ ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3$$

Dans ce cas on pourra faire les trois déductions suivantes:

1 | $ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3$
| —
| ax_1 1, ∧ e

1 | $ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3$
| —
| ax_2 1, ∧ e

1 | $ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3$
| —
| ax_3 1, ∧ e

ou encore écrire:

1 | $(\forall x)\ ax$
| —
| ax_i

où ax_i signifie *l'un quelconque* des éléments de Ω. Mais, pour représenter un élément quelconque de Ω, nous avons nos variables d'objets x, y, z. Si y prend ses valeurs sur Ω, il est clair que y peut prendre l'une des valeurs x_1, x_2 et x_3. Nous pourrons donc écrire:

1 | $(\forall x)\ ax$
| —
| ay

ou même, puisque la variable x est liée (et donc apparente):

1 | $(\forall x)\ ax$
| —
| ax

Procédons maintenant à deux généralisations.

1. Ω est un ensemble quelconque, pas nécessairement fini. Nous allons poser que la règle reste valable et donc écrire:

$$\begin{array}{|l} (\forall x)\ ax \\ \text{---} \\ ay \end{array}$$

2. L'expression quantifiée n'est pas nécessairement atomique.
   Par exemple: $A\ (x) = \text{df}\ ax \wedge bx \cdot \supset ax$.
   Posons que la règle est valable. Cela nous donne:

$$\begin{array}{|l} (\forall X)\ A(X) \\ \text{- - -} \\ A(Y) \end{array}$$

Mais ici deux questions surgissent:

1) Que veut dire $A(Y)$? Évidemment qu'on a changé le nom de la variable. Mais, dans l'exemple, $A(X)$ contenait trois mentions de X. Faut-il les changer toutes les trois ou pouvons-nous n'en changer que quelques-unes?

Pour prendre une décision qui soit conforme avec l'usage que nous avons l'intention de faire de notre système, prenons un exemple. Supposons que, dans le domaine des nombres naturels, nous ayons l'expression $(\forall x)\ (x{=}x)$. Nous pouvons certes affirmer que $x{=}x$, $y{=}y$, etc. Mais écrire $x{=}y$, c'est-à-dire changer le nom d'une seule des mentions de x, conduit manifestement à une absurdité: x n'est égal à y que si y est le même nombre que x.

Nous déciderons donc, dans ce contexte, que le changement de variable (si changement il y a) se fera sur toutes les mentions et nous parlerons alors de *substitution*. Posons la convention suivante:
Si $A(X)$ désigne une expression qui contient la variable X, $A(Y)$ désigne la même expression à ceci près qu'à *chaque* mention de X on a substitué une mention de Y.

Exemple $A(X)$	$ax \vee \sim ax$	$ay \supset by$	$ax \wedge bx \cdot \supset ax$
$A(Y)$	$ay \vee \sim ay$	$az \supset bz$	$ax \wedge bx \cdot \supset ax$

Le troisième exemple n'est paradoxal qu'en apparence. X désigne une variable quelconque (x dans le 1[er] ex., y dans le 2[ème], x dans le 3[ème]). Y de même. Rien n'empêche que X et Y désignent la même variable.

2) Sommes-nous véritablement libres d'utiliser n'importe quelle variable d'objets pour Y? Essayons.
Soit l'expression: $A(X) = \text{df}\ (\exists y)\ (x \neq y) \quad x, y \in \text{N}$. Alors l'expression

$(\forall X)\, A(X)$ désigne $(\forall x)\,(\exists y)\,(x \neq y)$. Utilisons notre règle: $(\exists y)\,(y \neq y)$. On voit qu'ici on n'a pas le droit de donner la valeur y à Y. En revanche, $(\exists y)\,(x \neq y)$ ou $(\exists y)\,(z \neq y)$ n'offrent aucune difficulté. Nous dirons que y n'est pas libre pour x. Cela signifie que l'expression $A(X)$ est de telle nature que y s'y trouve déjà liée et que, en conséquence, si on substitue y à x, on serait en présence d'une confusion de lecture.

D'une façon générale, nous dirons que *Y est libre pour X dans A*, si après qu'on a écrit Y au lieu de X, aucune mention qui devrait être libre ne se trouve liée.

Nous poserons alors:

Règle ∀ e

n	$(\forall X)\, A(X)$	

	$A(Y)$	n, ∀e à condition que Y soit libre pour X.

Exemples

[1] $\vdash p \supset (\forall x)\, ax \cdot \supset \cdot p \supset ay$

1	$p \supset (\forall x)\, ax$	hyp
2	p	hyp
3	$p \supset (\forall x)\, ax$	1, reit
4	$(\forall x)\, ax$	2, 3, ⊃ e
5	ay	4, ∀e, x/y
6	$p \supset ay$	2–5, ⊃ i
7	Th.	1–6, ⊃ i

Remarque:

La notation x/y signifie que « à la place de x on a substitué y ». *Substare* (= mettre sous): y est *sous* la barre oblique.

[2] $\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \wedge ryx) \supset rxx$

1	$(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \wedge ryx)$	hyp
2	$(\forall y)\,(rxy \wedge ryx)$	1, ∀ e x/x
3	$rxx \wedge rxx$	2, ∀ e y/x
4	rxx	3, ∧ e
5	Th.	1–4, ⊃ i

Remarque :

Il n'aurait pas été possible de prouver le théorème $(\forall x)(\forall y)(rxy \wedge ryx) \supset ryy$. A la ligne 2, en effet, il aurait fallu substituer y à x et y n'était pas libre pour x.

La règle d'introduction est un peu plus délicate. Pour prouver en effet qu'une propriété, disons a, est valable pour tous les objets d'un domaine, donc pour établir $(\forall x)\, ax$, on pourrait, à la rigueur et dans les cas où Ω est fini, s'en assurer pour chaque élément successivement. Mais non seulement un tel procédé serait souvent pratiquement inutilisable, il n'aurait aucun sens dans les cas où Ω est infini.

On sait que la technique consiste à prendre un *élément quelconque* (et on le désigne naturellement par une variable libre qui prend ses valeurs sur Ω) et à raisonner sur lui. La question est alors de savoir à quelles conditions on a bien affaire à un élément quelconque. La réponse théorique est simple : on ne doit faire sur lui aucune hypothèse autre que son appartenance à Ω.

Formellement le problème consiste à arriver, en fin de déduction, à écrire $(\forall x)\, ax$:

```
| | .
| | .
| | .
| (∀x) ax
```

Il est tout d'abord évident que la sous-déduction qui doit conduire à dire « donc $(\forall\ x)\ ax$ » ne saurait commencer par aucune hypothèse qui contienne x. Toute hypothèse ferait de x un représentant particulier des éléments de Ω. Nous déciderons en conséquence que la sous-déduction en question se fera *sans hypothèse.*

Mais on voit aussi facilement que cette restriction ne suffit pas. L'hypothèse pourrait avoir été faite avant la sous-déduction et réitérée. Nous poserons donc en plus l'interdiction de réitérer toute expression qui contiendrait x libre. Et par prudence, nous écrirons à la gauche du trait vertical le nom de la variable qui n'ose le franchir. Nous parlerons dans ce cas d'une *sous-déduction catégorique.* On a alors :

Règle $\forall$ i

```
n | X | .
  |   | .
  |   | .
m |   | A (X)
  | (∀ X) A (X)          n–m, ∀ i
```

Exemples

[1] $\vdash (\forall x)(ax \wedge bx) \supset \cdot (\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$

1		$(\forall x)(ax \wedge bx)$	hyp
2	x	$(\forall x)(ax \wedge bx)$	1, reit. La variable est *liée*, on peut
3		$ax \wedge bx$	2, $\forall$ e donc réitérer.
4		ax	3, $\wedge$ e
5		$(\forall x)\, ax$	2–4, $\forall$ i
6	x	$(\forall x)(ax \wedge bx)$	1, reit
7		$ax \wedge bx$	6, $\forall$ e
8		bx	7, $\wedge$ e
9		$(\forall x)\, bx$	6–8, $\forall$ i
10		$(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$	5, 9, $\wedge$ i
11		Th	1–10, $\supset$ i

[2] $\vdash (\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx \cdot \supset (\forall x)(ax \wedge bx)$

1		$(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$	hyp
2	x	$(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$	1, reit
3		$(\forall x)\, ax$	2, $\wedge$ e
4		$(\forall x)\, bx$	2, $\wedge$ e
5		ax	3, $\forall$ e
6		bx	4, $\forall$ e
7		$ax \wedge bx$	5, 6, $\wedge$ i
8		$(\forall x)(ax \wedge bx)$	2–7, $\forall$ i
9		Th	1–8, $\supset$ i

Remarque

$(\forall x)(ax \wedge bx)$ est équivalent à $(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$. Si Ω est l'ensemble des Académiciens, il est donc logiquement équivalent de dire qu'« ils sont tous célèbres et immortels » ou qu'« ils sont tous célèbres et qu'ils sont tous immortels ».

Soit maintenant Ω une assemblée dont on sait qu'elle n'est pas mixte. On peut donc dire que tous sont des hommes ou que tous sont des femmes. Ceci implique que tous sont des hommes ou des femmes.

[3] $\vdash (\forall x)\, ax \vee (\forall x)\, bx \cdot \supset (\forall x)(ax \vee bx)$

1		$(\forall x)\, ax \vee (\forall x)\, bx$	hyp
2	x	$(\forall x)\, ax \vee (\forall x)\, bx$	1, reit

3	$(\forall x)\ ax$	hyp ($\vee$ e)
4	ax	3, $\forall$ e
5	$ax \vee bx$	4, $\vee$ i
6	$(\forall x)\ bx$	hyp ($\vee$ e)
7	bx	6, $\forall$ e
8	$ax \vee bx$	7, $\vee$ i
9	$ax \vee bx$	2, 3–5, 6–8, $\vee$ e
10	$(\forall x)\ (ax \vee bx)$	2–9, $\forall$ i
11	Th	1–10, $\supset$ i

En revanche, si on sait qu'une assemblée ne contient que des hommes et des femmes (ce qui exclut par exemple les enfants) on ne peut conclure qu'elle n'est pas mixte. Il est intéressant de tenter de démontrer l'expression $(\forall x)\ (ax \vee bx) \supset \cdot\ (\forall x)\ ax \vee (\forall x)\ bx$ pour voir comment le formalisme utilisé empêche la preuve.

1	$(\forall x)\ (ax \vee bx)$	hyp
2	x | $(\forall x)\ (ax \vee bx)$	1, reit
3	$ax \vee bx$	2, $\forall$ e
4	x | . . .	

Pour pouvoir écrire à une ligne $n > 4$ $(\forall x)\ ax$, il faudrait inaugurer à la ligne 4 une sous-déduction marquée x et on ne peut donc réitérer 3.

2.6 Le quantificateur existentiel

Il est tout d'abord clair que si l'on a pu établir qu'une propriété a convenait à un élément quelconque du domaine Ω, si donc on a pu établir ax, on peut assurer qu'il existe au moins un individu qui a la propriété a:

ax		ax		ax	
- - -	ou	- - -	ou	- - -	etc.
$(\exists x)\ ax$		$(\exists y)\ ay$		$(\exists z)\ az$	

Il n'y a pas de difficulté à ériger ceci en règle générale, à condition que la variable liée qui sert à indiquer qu'il existe (au moins) un élément de Ω tel que cet élément jouit de la propriété ne prête pas à confusion.

Exemple

Supposons que l'on ait pu établir (Ω = df N) que $y \neq x$. Il est sans autre

possible de poser: $(\exists y)\ (y \neq x)$ ou $(\exists z)\ (z \neq x)$ ou même $(\exists \llcorner)\ (\lrcorner \neq x)$. Mais on ne saurait écrire $(\exists x)\ (x \neq x)$.

Nous stipulerons donc de nouveau que la variable choisie doit être *libre pour x*. On voit donc la ressemblance entre les conditions imposées par les variables dans la règle ∀ e et dans la règle ∃ i que nous cherchons. Il existe cependant une différence essentielle que nous allons mettre en évidence par un exemple intuitif.

Supposons qu'on ait l'expression $(\forall x)\ (x \leqslant x)$, donc une expression de la forme $(\forall X)\ A\ (X)$. La règle ∀ e permet d'écrire $x \leqslant x$ ou $y \leqslant y$, etc. Si nous sommes dans le domaine des nombres naturels, nous pouvons même écrire $3 \leqslant 3$, $6 \leqslant 6$, etc. L'expression $A\ (Y)$ que la règle permet d'écrire signifie que la propriété considérée est vraie pour un élément quelconque du domaine. Mais nous avions aussi souligné que l'expression $A\ (Y)$ exigeait que *chaque* mention de X soit transformée en une mention de Y et nous avions parlé pour cela de *substitution*. De ce qu'on a toujours $y \leqslant y$ ne suit pas, en effet, qu'on ait toujours $y \leqslant x$ ou $x \leqslant y$. La chose se voit sans peine si on introduit des constantes d'individus: $6 \leqslant 6$ mais on ne peut poser $6 \leqslant x$ quel que soit x.

Mais supposons qu'on ait pu établir que $6 \leqslant 6$. Alors on peut certes écrire: $(\exists x)\ (x \leqslant x)$. Rien n'empêche toutefois de se contenter de $(\exists x)$ $(6 \leqslant x)$ ou $(\exists x)\ (x \leqslant 6)$. D'une façon générale, si on a une expression $A\ (Y)$ on pourra écrire $(\exists X) A\ [X]$ en remplaçant un nombre quelconque de mentions Y par une mention de X. Nous parlerons d'un *remplacement* et nous utiliserons des crochets pour rappeler la chose.

Finalement nous poserons:

Règle ∃ i

n	$A\ (Y)$	

	$(\exists X)\ A\ [X]$	n, ∃ i à condition que X soit libre pour Y

Exemples

[1] $\vdash (\forall x)\ (ax \wedge bx) \supset \cdot\ (\exists x)\ ax \wedge (\exists y)\ by$

1	$(\forall x)\ (ax \wedge bx)$	hyp
	—	
2	$ax \wedge bx$	1, ∀ e x/x
3	ax	2, ∧ e
4	$(\exists x)\ ax$	3, ∃ i x/x
5	bx	2, ∧ e

6	$(\exists y)\ by$	5, $\exists$ i x/y
7	$(\exists x)\ ax \wedge (\exists y)\ by$	4, 6, $\wedge$ i
8	Th	1–7, $\supset$ i

Remarque

La notation x/y signifie ici qu'on a *remplacé* x par y.

[2] $\vdash (\forall x)\ rxx \supset (\exists x)(\exists y)\ rxy$

1	$(\forall x)\ rxx$	hyp	
	—		
2	rzz	1, $\forall$ e, x/z	
3	$(\exists y)\ rzy$	2, $\exists$ i, z/y	on a remplacé le deuxième
4	$(\exists x)(\exists y)\ rxy$	3, $\exists$ i, z/x	z seulement par y
5	Th	1–4, $\supset$ i	

Voyons maintenant comment se débarrasser d'un quantificateur existentiel. Considérons pour cela une expression de la forme $(\exists X)\ A\ (X)$, par exemple $(\exists x)\ ax$. Cela signifie qu'il existe au moins un élément du domaine considéré qui jouit de la propriété a. Nous ne savons malheureusement pas duquel (ou desquels) il s'agit. Nous allons donc l'appeler x, nous y tenir, et examiner les conséquences de l'hypothèse que *ce* x jouit de la propriété a:

1	$(\exists x)\ ax$	
2	ax	hyp
	—	
	.	
	.	
	.	

Aussi longtemps que les conséquences de l'hypothèse de la ligne 2 font appel à x, nous ne pouvons rien conclure, puisque nous ne savons pas de quel élément (de quels éléments) il est possible d'affirmer a. En revanche, si nous arrivons, disons à la ligne n, à une expression qui ne mentionne plus x (nous la noterons p) nous pourrons raisonner ainsi:

Le seul fait que $(\exists x)\ ax$ permet de déduire p. Donc p peut s'affirmer sur la seule base de $(\exists x)\ ax$. Et nous aurons:

1	$(\exists x)\ ax$	
2	ax	
	—	
	.	
	.	
	.	
	.	
n	p	
$n+1$	p	1, 2–n, $\exists$ e

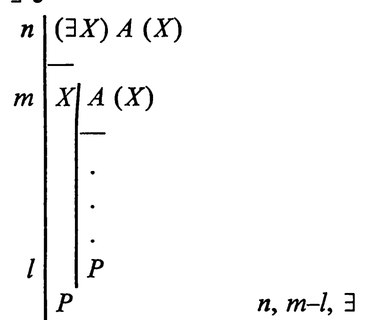
Remarque

Cette écriture montre bien que p (à la ligne $n + 1$) dépend encore de $(\exists x)\ ax$, mais pas du x particulier qui jouit de la propriété.

Il y a cependant encore une précaution à prendre qui tient précisément à ce qu'une règle de cette espèce prétend passer à p sur la seule foi de $(\exists x)\ ax$. Et c'est de ne pas prêter à ce x d'autres propriétés que celle d'être a. Pour cela nous nous interdirons toute réitération d'une expression qui contiendrait x libre dans la sous-déduction.

Cela conduit à poser la règle:

Règle ∃ e



Remarques

1. L'hypothèse m doit se faire au nom de la variable X (celle qui est quantifiée à la ligne n).
2. Selon nos conventions, P désigne une proposition (expression sans aucune variable libre). On pourrait tolérer une expression qui contiendrait une variable libre, *à condition que ce ne soit pas X.*
3. Le X, à gauche de la barre verticale, rappelle qu'aucune expression contenant X (libre) ne peut être réitérée.

Exemples

[1] $\vdash (\exists x)\ (ax \lor bx) \equiv \cdot\ (\exists x)\ ax \lor (\exists x)\ bx$

1	$(\exists x)\ (ax \lor bx)$	hyp
2	x | $ax \lor bx$	hyp (pour ∃ e)
3	ax	hyp (pour ∨ e)
4	$(\exists x)\ ax$	3, ∃ i, x/x

5	$(\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx$	4, $\vee$ i
6	bx	hyp (pour $\vee$ e)
7	$(\exists x)\, bx$	6, $\exists$ i, x/x
8	$(\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx$	7, $\vee$ i
9	$(\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx$	2, 3–5, 6–8, $\vee$ e
10	$(\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx$	1, 2–9, $\exists$ e (l'expression 9 ne contient pas x libre)
11	$(\exists x)(ax \vee bx) \supset \cdot (\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx$	1–10, $\supset$ i

1	$(\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx$	hyp
2	$(\exists x)\, ax$	hyp (pour $\vee$ e)
3	$x \mid ax$	hyp (pour $\exists$ e)
4	$ax \vee bx$	3, $\vee$ i
5	$(\exists x)(ax \vee bx)$	4, $\exists$ i, x/x
6	$(\exists x)(ax \vee bx)$	2, 3–5, $\exists$ e
7	$(\exists x)\, bx$	hyp (pour $\vee$ e)
8	$x \mid bx$	hyp (pour $\exists$ e)
9	$ax \vee bx$	8, $\vee$ i
10	$(\exists x)(ax \vee bx)$	9, $\exists$ i, x/x
11	$(\exists x)(ax \vee bx)$	7, 8–10, $\exists$ e
12	$(\exists x)(ax \vee bx)$	1, 2–6, 7–11, $\vee$ e
13	$(\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx \cdot \supset (\exists x)(ax \vee bx)$	1–12, $\supset$ i

Ces deux démonstrations prouvent l'équivalence posée par [1]. Si Ω est l'ensemble des ouvrages d'une bibliothèque, on a en effet que « la bibliothèque possède un traité de géométrie ou de physique » équivaut à « la bibliothèque possède un traité de géométrie ou elle possède un traité de physique ».

[2] $\vdash (\exists x)(ax \wedge bx) \supset \cdot (\exists x)\, ax \wedge (\exists x)\, bx$

1	$(\exists x)(ax \wedge bx)$	hyp
2	$x \mid ax \wedge bx$	hyp (pour $\exists$ e)
3	ax	2, $\wedge$ e
4	$(\exists x)\, ax$	3, $\exists$ i, x/x

5	bx	2, $\wedge$ e
6	$(\exists x)\ bx$	5, $\exists$ i, x/x
7	$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx$	4, 6, $\wedge$ i
8	$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx$	1, 2–7, $\exists$ e
9	Th.	1–8, $\supset$ i

Il est intéressant d'examiner l'implication réciproque:

$$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx \cdot \supset (\exists x)\ (ax \wedge bx).$$

Intuitivement, on ne doit pas pouvoir déduire de ce qu'il existe un individu qui est a et un individu qui est b qu'il existe un individu qui est a et b. Formellement on a:

1	$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx$	hyp
2	$(\exists x)\ ax$	1, $\wedge$ e
3	$(\exists x)\ bx$	1, $\wedge$ e
4	x | ax	hyp (pour $\exists$ e)
5	$(\exists x)\ bx$	3, reit (l'expression 3 ne contient pas x libre)
6	x | bx	hyp (pour $\exists$ e)

Mais on voit que, pour avoir $ax \wedge bx$, il faudrait réitérer ax qui contient x libre.

Remarque

La comparaison des exemples donnés pour illustrer la règle $\forall$ i avec ceux-ci met en évidence une dualité à laquelle participent $\forall$, $\exists$, $\wedge$ et $\vee$.

2.7 Règles dérivées

Les quantificateurs sont d'un usage si fréquent qu'il sera commode d'établir les quatre règles suivantes qui permettent de les introduire et de les éliminer dans un contexte négatif.

Règle neg $\forall$ **i**

n	$(\exists X) \sim A\ (X)$	
	$\sim (\forall X)\ A\ (X)$	n, neg $\forall$ i

Règle neg $\forall$ **e**

n	$\sim (\forall X)\ A\ (X)$	
	$(\exists X) \sim A\ (X)$	n, neg $\forall$ e

Règle neg ∃ i

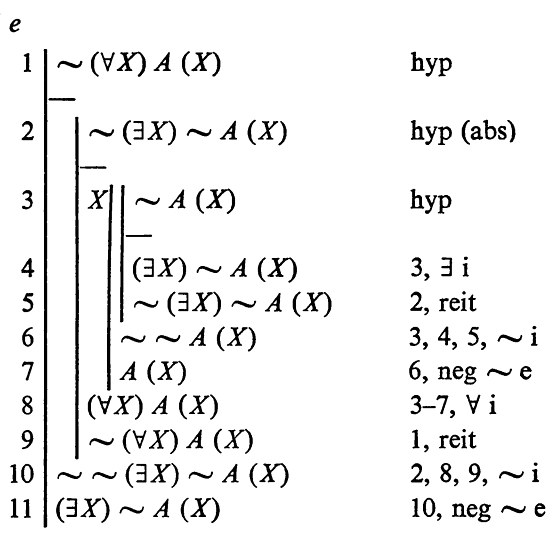
n	$(\forall X) \sim A\,(X)$	
	—	
	$\sim (\exists X)\, A\,(X)$	n, neg ∃ i

Règle neg ∃ e

n	$\sim (\exists X)\, A\,(X)$	
	—	
	$(\forall X) \sim A\,(X)$	n, neg ∃ e

Dérivations

neg ∀ e



1	$\sim (\forall X)\, A\,(X)$	hyp
	—	
2	$\sim (\exists X) \sim A\,(X)$	hyp (abs)
	—	
3	X $\sim A\,(X)$	hyp
	—	
4	$(\exists X) \sim A\,(X)$	3, ∃ i
5	$\sim (\exists X) \sim A\,(X)$	2, reit
6	$\sim \sim A\,(X)$	3, 4, 5, ~ i
7	$A\,(X)$	6, neg ~ e
8	$(\forall X)\, A\,(X)$	3–7, ∀ i
9	$\sim (\forall X)\, A\,(X)$	1, reit
10	$\sim \sim (\exists X) \sim A\,(X)$	2, 8, 9, ~ i
11	$(\exists X) \sim A\,(X)$	10, neg ~ e

Remarque

La sous-déduction 3–7 est bien catégorique: elle-même ne commence pas par une hypothèse!

neg ∀ i

1	$(\exists X) \sim A\,(X)$	hyp
	—	
2	$(\forall X)\, A\,(X)$	hyp (abs.)
	—	
3	$(\exists X) \sim A\,(X)$	1, reit
4	X $\sim A\,(X)$	hyp (pour ∃ e)
	—	
5	$(\forall X)\, A\,(X)$	2, reit
6	$A\,(X)$	5, ∀ e
7	$\sim (\exists X) \sim A\,(X)$	4, 6, ~ e
8	$\sim (\exists X) \sim A\,(X)$	3, 4–7, ∃ e
9	$\sim (\forall X)\, A\,(X)$	2, 3, 8, ~ i

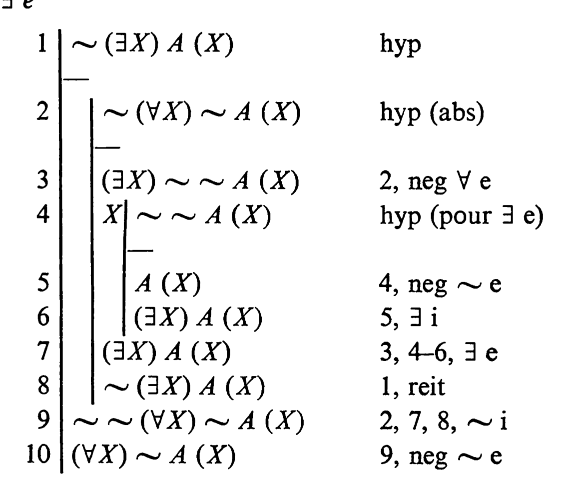
Remarque

La ligne 7 résulte de ce que la règle $\sim$e nous permet d'introduire n'importe quelle proposition. Il est habile de choisir celle-ci.

neg ∃ i

1	$(\forall X) \sim A(X)$	hyp
2	$(\exists X)\, A(X)$	hyp (abs)
3	X $A(X)$	hyp (pour ∃ e)
4	$(\forall X) \sim A(X)$	1, reit
5	$\sim A(X)$	4, ∀ e
6	$P \wedge \sim P$	3, 5, $\sim$ e
7	$P \wedge \sim P$	2, 3–6, ∃ e
8	P	7, ∧ e
9	$\sim P$	7, ∧ e
10	$\sim (\exists X)\, A(X)$	2, 8, 9, $\sim$ i

neg ∃ e



1	$\sim (\exists X)\, A(X)$	hyp
2	$\sim (\forall X) \sim A(X)$	hyp (abs)
3	$(\exists X) \sim \sim A(X)$	2, neg ∀ e
4	X $\sim \sim A(X)$	hyp (pour ∃ e)
5	$A(X)$	4, neg $\sim$ e
6	$(\exists X)\, A(X)$	5, ∃ i
7	$(\exists X)\, A(X)$	3, 4–6, ∃ e
8	$\sim (\exists X)\, A(X)$	1, reit
9	$\sim \sim (\forall X) \sim A(X)$	2, 7, 8, $\sim$ i
10	$(\forall X) \sim A(X)$	9, neg $\sim$ e

Remarque

A la ligne 6 de la dérivation de la règle neg ∃ i, nous avons choisi d'écrire la contradiction $P \wedge \sim P$ pour illustrer la liberté dont nous disposions. Il aurait aussi été possible de procéder comme dans la dérivation de la règle neg ∀ i et d'écrire $\sim (\exists X)\, A(X)$ au lieu de la contradiction $P \wedge \sim P$.

Remarque

Il est maintenant facile de prouver que $(\forall x)\ ax \leftrightarrow \sim (\exists x) \sim ax$ et que $(\exists x)\ ax \leftrightarrow \sim (\forall x) \sim ax$. Cette dernière équivalence fait voir que l'on pourrait en logique (classique) des prédicats n'introduire que le quantificateur $\forall$ et poser la définition.

$$(\exists X)\, AX = \text{df} \sim (\forall X) \sim A(X)$$

2.8 Notes sur les syllogismes

La théorie classique du syllogisme prend appui sur une double classification des propositions en (1) universelles et particulières (2) affirmatives et négatives. Les quatre types ainsi engendrés sont désignés par les lettres conventionnelles suivantes:

Qualité

Quantité	Affirmatives	Négatives
Universelles	A	E
Particulières	I	O

Exemples

(A) Tout artiste est bienveillant
(E) Aucun artiste n'est bienveillant
(I) Quelque artiste est bienveillant
(O) Quelque artiste n'est pas bienveillant
Nous obtenons dans notre symbolisme:
(A) $(\forall x)\,(ax \supset bx)$
(E) $\sim (\exists x)\,(ax \wedge bx) \equiv (\forall x) \sim (ax \wedge bx) \equiv (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$
(I) $(\exists x)\,(ax \wedge bx)$
(O) $(\exists x)\,(ax \wedge \sim bx)$

Un *syllogisme* est alors un raisonnement qui part de deux prémisses, d'une des formes ci-dessus, et qui conduit à une conclusion d'une même forme. Seules, d'ailleurs, certaines combinaisons sont concluantes.

Exemples empruntés à Lewis Carroll

[1] Tout homme prudent évite les hyènes.
Aucun banquier n'est imprudent.
Aucun banquier ne manque jamais d'éviter les hyènes.

Posons:

a = df être prudent
b = df éviter les hyènes
c = df être banquier

Il vient:

1	$(\forall x)(ax \supset bx)$	hyp
2	$\sim(\exists x)(cx \wedge \sim ax)$	hyp
3	$(\forall x) \sim (cx \wedge \sim ax)$	2, neg $\exists$e
4	x cx	hyp
5	$(\forall x) \sim (cx \wedge \sim ax)$	3, reit
6	$\sim(cx \wedge \sim ax)$	5, $\forall$e
7	$\sim cx \vee \sim\sim ax$	6, neg $\wedge$ e
8	$\sim cx$	hyp
9	cx	4, reit
10	bx	8, 9, $\sim$ e
11	$\sim\sim ax$	hyp
12	ax	11, neg $\sim$ e
13	$(\forall x)(ax \supset bx)$	1, reit (x est liée)
14	$ax \supset bx$	13, $\forall$e
15	bx	12, 14, $\supset$ e
16	bx	7, 8–10, 11–15, $\vee$ e
17	$cx \supset bx$	4–16, $\supset$ i
18	$(\forall x)(cx \supset bx)$	4–17, $\forall$i

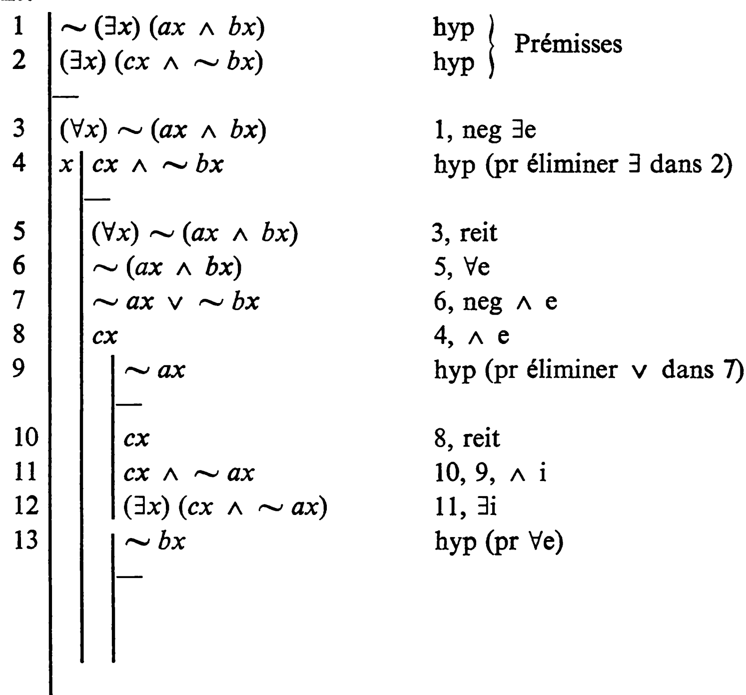
Soit « tout banquier évite les hyènes » ce qui est bien une variante de la conclusion proposée.

[2] Aucune grenouille n'est poète
Quelques canards ne sont pas poètes
Quelques canards ne sont pas des grenouilles

Posons:

a = df être grenouille
b = df être poète Il faudrait déduire que $(\exists x)(cx \wedge \sim ax)$
c = df être canard

Il vient :



1	$\sim (\exists x)(ax \wedge bx)$	hyp } Prémisses
2	$(\exists x)(cx \wedge \sim bx)$	hyp }
3	$(\forall x) \sim (ax \wedge bx)$	1, neg ∃e
4	x | $cx \wedge \sim bx$	hyp (pr éliminer ∃ dans 2)
5	$(\forall x) \sim (ax \wedge bx)$	3, reit
6	$\sim (ax \wedge bx)$	5, ∀e
7	$\sim ax \vee \sim bx$	6, neg ∧ e
8	cx	4, ∧ e
9	$\sim ax$	hyp (pr éliminer ∨ dans 7)
10	cx	8, reit
11	$cx \wedge \sim ax$	10, 9, ∧ i
12	$(\exists x)(cx \wedge \sim ax)$	11, ∃i
13	$\sim bx$	hyp (pr ∀e)

La proposition 12 qui peut se lire « Quelques canards ne sont pas des grenouilles » ne peut s'obtenir lorsque le second terme de la disjonction est pris comme hypothèse. Comme le signale Carroll, le raisonnement proposé est un sophisme.

Considérons maintenant d'une façon générale trois propositions de l'une des formes A, E, I, O que nous désignerons respectivement par: M, m et C. Supposons

(1) que M contient les prédicats a et b

(2) que m contient les prédicats b et c

(3) que C contient les prédicats c et a.

Exemple

M: $(\forall x)(bx \supset ax)$

m: $(\exists x)(cx \wedge bx)$

C: $(\exists x)(cx \wedge ax)$

Il peut arriver, comme dans cet exemple, que $M, m \vdash C$. Dans ce cas les trois propositions constituent un *syllogisme*. Les propositions M et m en sont les *prémisses*, la proposition C la *conclusion*. De plus le prédicat b qui figure une fois dans chaque prémisse (et qui est éliminé dans la conclusion), est

appelé le *moyen terme*. Le prédicat a, qui figure dans la première prémisse et qui vient en seconde place dans la conclusion, s'appelle le *grand terme*. Le prédicat c s'appelle le *petit terme*. Disons enfin que la proposition qui contient le grand terme est la *majeure*, celle qui contient le petit terme est la *mineure*.

Remarque

Il y a quelque arbitraire à distinguer le grand et le petit terme dans l'exemple donné puisque la conclusion pourrait tout aussi bien s'écrire $(\exists x)(ax \wedge cx)$: la conjonction est une opération commutative. Toutefois, si la conclusion est de la forme A ou E, le grand terme est bien déterminé: c'est le conséquent de la conditionnelle.

Pour prouver que trois propositions constituent un syllogisme, il suffit d'établir par les règles de notre calcul qu'il existe une déduction de la conclusion à partir des prémisses.

Toutefois la syllogistique remonte à Aristote (384-322) et a été développée par les logiciens médiévaux. Ceux-ci ont établi des règles pour décider quels triples de propositions constituaient des syllogismes. En effet, chacune des propositions M, m et C peut avoir une des formes A, E, I, O. Il y a dans $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ combinaisons possibles. Il saute aux yeux qu'une combinaison de la forme, disons IIA, ne saurait constituer un syllogisme valide. On ne peut conclure sur tous les objets du domaine alors que les prémisses ne parlent que de quelques-uns.

Nous n'allons pas faire ici la théorie des syllogismes. Le calcul des prédicats la rend superflue. Toutefois, il est intéressant de connaître certains éléments de la terminologie dont usaient les Anciens et de soulever un problème fondamental.

Pour établir leurs règles, les logiciens anciens avaient trouvé commode de partager les syllogismes en quatre *figures*. Étant entendu que les propositions sont toujours écrites dans l'ordre M, m et C, le moyen terme (t) peut figurer de quatre façons différentes (p est le petit terme et g le grand terme).

	1ère figure	*2ème figure*	*3ème figure*	*4ème figure*
Majeure M	$t - g$	$g - t$	$t - g$	$g - t$
Mineure m	$p - t$	$p - t$	$t - p$	$t - p$
Conclusion C	$p - g$	$p - g$	$p - g$	$p - g$

Dans chaque figure certaines formes sont valides, d'autres pas. Les formes s'appellent les *modes*. Nous donnons le tableau des modes valides. Le lecteur pourra sans peine s'en assurer.

1ère figure	*2ème figure*	*3ème figure*	*4ème figure*
AAA	EAE	IAI	AEE
EAE	AEE	AII	IAI
AII	EIO	OAO	EIO
EIO	AOO	EIO	

Sur les 64 modes possibles, il en existe donc 15 qui sont valides.

Toutefois, la tradition en a encore considéré quatre:

3ème figure: AAI et EAO

4ème figure: AAI et EAO

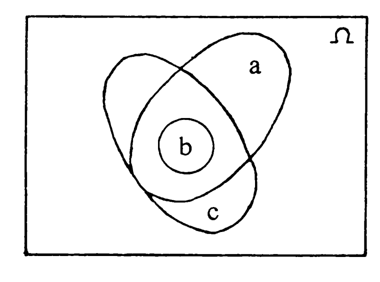
Examinons, par exemple, le mode AAI de la 3ème figure (*a:* grand terme, *c:* petit terme, *b:* moyen terme).

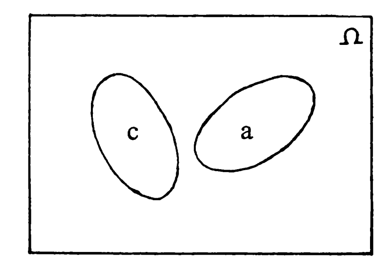
$M\ (\forall x)\ (bx \supset ax)$

$m\ (\forall x)\ (bx \supset cx)$

$C\ (\exists x)\ (cx \wedge ax)$

Raisonnons intuitivement sur un diagramme:





On voit que ce qui « empêche » que *a* et *c* soient disjointes, c'est la présence de *b*. S'il n'existait aucun élément de Ω qui jouisse de la propriété *b*, il se pourrait qu'il n'existe non plus aucun élément qui jouisse à la fois de la propriété *a* et de la propriété *c* (2ème figure).

Il s'ensuit que les 4 modes ci-dessus ne peuvent être démontrés dans notre système que si l'on ajoute explicitement des prémisses d'existence:

3ème figure: AAI exige $(\exists x)\ bx$

EAO exige $(\exists x)\ bx$

4ème figure: AAI exige $(\exists x)\ cx$

EAO exige $(\exists x)\ bx$

Il existe certaines relations très importantes entre les propositions A, E, I et O que nous allons mettre en évidence. Commençons, pour cela, par poser quelques définitions.

Deux propositions *P* et *Q* sont dites *contradictoires* si $\vdash (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$, ce que nous noterons $\vdash P \mathrm{W} Q$ ou encore $P\ (\mathrm{W})\ Q$.

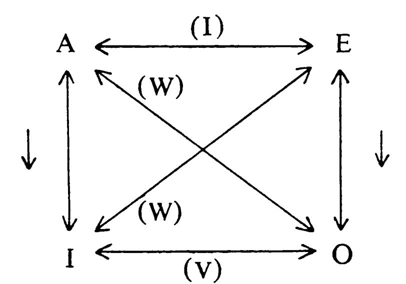
Deux propositions *P* et *Q* sont dites *contraires* si $\vdash \sim (P \wedge Q)$, ce que nous noterons $\vdash P \mid Q$ ou encore $P\ (\mid)\ Q$.

Une proposition Q est dite *subalterne* d'une proposition P si $\vdash P \supset Q$, ce que nous avons aussi noté $P \rightarrow Q$.

Remarques

1. A l'exception de la relation d'implication qui a un signe spécial, nous avons noté (*) la relation engendrée par l'opération *, lorsque la proposition composée $P * Q$ est un théorème.
2. Nous retrouverons les opérateurs W et I au cours du Fascicule 2.

Les logiciens médiévaux avaient alors remarqué que les propositions A, E, I et O étaient liées entre elles comme l'indique le schéma suivant, appelé *carré des oppositions.*



Il n'y a aucune difficulté particulière à prouver que A et O d'une part, E et I de l'autre sont contradictoires. En revanche, l'établissement des quatre autres relations pose un problème. Prenons l'exemple de la relation de contrariété. Il faudrait prouver que $\vdash$ A | E soit que $\vdash \sim (\text{A} \wedge \text{E})$.

Il est facile de montrer qu'on a

$$\vdash \sim (\text{A} \wedge \text{E}) \equiv (\text{A} \supset \sim \text{E})$$

en utilisant, entre autres, les règles neg $\supset$ e et neg $\supset$ i. Nous sommes donc ramenés à nous demander si $\text{A} \supset \sim \text{E}$, donc si $(\forall x)\,(ax \supset bx) \supset \sim (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$ est un théorème. Tentons-en la preuve:

1	$(\forall x)\,(ax \supset bx)$	hyp
2	$\quad (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$	hyp (abs.)
3	$\quad ax \supset \sim bx$	2, $\forall$e
4	$\quad (\forall x)\,(ax \supset bx)$	1, reit
5	$\quad ax \supset bx$	4, $\forall$e

Nous voyons qu'il ne nous est pas possible de poursuivre.

Faisons donc une hypothèse supplémentaire et posons qu'il existe quelque x qui est a, donc tentons d'effectuer la déduction

$$(\exists x)\, ax \vdash (\forall x)\,(ax \supset bx) \supset \sim (\forall x)\,(ax \supset \sim bx).$$

Il vient:

1	$(\exists x)\ ax$	hyp (supplémentaire)
2	$(\forall x)\ (ax \supset bx)$	hyp
3	$(\forall x)\ (ax \supset \sim bx)$	hyp (abs.)
4	$(\exists x)\ ax$	1, reit
5	ax	hyp (pour $\exists$e)
6	$(\forall x)\ (ax \supset bx)$	2, reit
7	$(\forall x)\ (ax \supset \sim bx)$	3, reit
8	$ax \supset bx$	6, $\forall$e
9	$ax \supset \sim bx$	7, $\forall$e
10	bx	5, 8, $\supset$ e
11	$\sim bx$	5, 9, $\supset$ e
12	$p \wedge \sim p$	10, 11, $\sim$ e
13	$p \wedge \sim p$	4, 5–12, $\exists$e
14	p	13, $\wedge$ e
15	$\sim p$	13, $\wedge$ e
16	$\sim (\forall x)\ (ax \supset \sim bx)$	3, 14, 15, $\sim$ i
17	$(\forall x)(ax \supset bx) \supset \sim(\forall x)(ax \supset \sim bx)$	1–16, $\supset$ i

Nous pouvons donc conclure que, *sous l'hypothèse* $(\exists x)\ ax$, les propositions A et E sont des contraires.

On peut s'assurer qu'il en va de même pour les relations $(\vee)$ et $\rightarrow$, de sorte que, en conclusion, nous aurons:

1) $\vdash$ A W O et $\vdash$ E W I
2) $(\exists x)\ ax \vdash$ A I E
3) $(\exists x)\ ax \vdash$ I $\vee$ O
4) $(\exists x)\ ax \vdash$ A $\supset$ I et $(\exists x)\ ax \vdash$ E $\supset$ O.

Remarque

Il ne faudrait pas se hâter de conclure que nos prédécesseurs se sont trompés. Il n'acceptaient simplement pas de dire « tous les *a* sont *b* » dans le cas où aucun *x* n'était *a*. Si nous avons élargi notre façon de parler, c'est sous l'influence de l'algèbre des classes. Dire « tous les *a* sont *b* », c'est dire que la classe des *a* est contenue dans celle des *b*. Si $\sim (\exists x)\ ax$, c'est que la classe des *a* est la classe vide et l'on sait qu'il est indispensable en algèbre d'introduire la classe vide et de reconnaître qu'elle est contenue dans toute autre classe.

2.9 Quelques propriétés des relations

Les relations binaires de la forme *rxy* jouent, dans tous les domaines d'application, un rôle important. C'est la raison pour laquelle nous allons consacrer un paragraphe à en étudier certains aspects. Nous laisserons la plupart des démonstrations aux soins du lecteur.

1. *Permutation des quantificateurs*

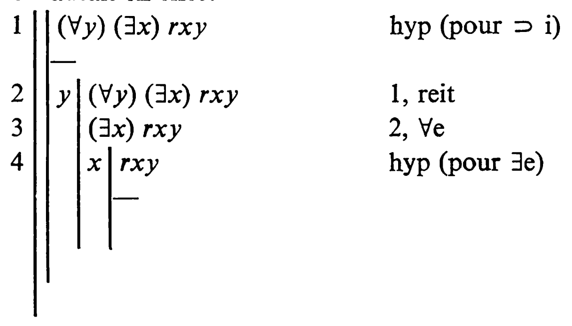
Soit *rxy* la relation « *x* est cause de *y* ». Dans le domaine Ω des phénomènes, la formule $(\forall y)\ (\exists x)\ rxy$ pourra se lire « pour tout phénomène *y*, il y en a un *x* qui est cause de *y* ». La formule $(\exists x)\ (\forall y)\ rxy$ se lirait: « il y a un phénomène *x* qui est cause de tout phénomène *y* ». D'une part, on exprime que tout phénomène a une cause, éventuellement chacun la sienne, d'autre part on postule qu'il existe une cause commune à tous les phénomènes (Dieu par exemple, pour certains philosophes.)

Intuitivement, on a évidemment $(\exists x)\ (\forall y)\ rxy \rightarrow (\forall y)\ (\exists x)\ rxy$ mais l'implication inverse ne saurait être valable sans autre. Nos règles correspondent à cet usage, comme le montre le théorème suivant:

$\vdash (\exists x)\ (\forall y)\ rxy \supset (\forall y)\ (\exists x)\ rxy$

1	$(\exists x)\ (\forall y)\ rxy$	hyp (pour $\supset$ i)
2	y | $(\exists x)\ (\forall y)\ rxy$	1, reit
3	x | $(\forall y)\ rxy$	hyp (pour $\exists$e)
4	rxy	3, $\forall$e
5	$(\exists x)\ rxy$	4, $\exists$i
6	$(\exists x)\ rxy$	2, 3–5, $\exists$e (*x* n'est plus libre)
7	$(\forall y)\ (\exists x)\ rxy$	2–6, $\forall$i
8	Th.	1–7, $\supset$ i

En revanche l'expression $(\forall y)\ (\exists x)\ rxy \supset (\exists x)\ (\forall y)\ rxy$ n'est pas démontrable. On aurait en effet:



1	$(\forall y)\ (\exists x)\ rxy$	hyp (pour $\supset$ i)
2	y | $(\forall y)\ (\exists x)\ rxy$	1, reit
3	$(\exists x)\ rxy$	2, $\forall$e
4	x | rxy	hyp (pour $\exists$e)

Il est impossible de « ressortir » l'expression rxy de la sous-déduction stricte x, pour utiliser la règle $\forall$i qui devait permettre d'écrire $(\forall y)\, rxy$, *avant* d'avoir lié x.

Toutefois, on verra sans peine que deux quantificateurs de même nom (deux $\forall$ ou deux $\exists$) peuvent être permutés à volonté.

Résumé mnémotechnique

$$(\forall X)(\forall Y) \leftrightarrow (\forall Y)(\forall X)$$
$$(\exists X)(\exists Y) \leftrightarrow (\exists Y)(\exists X)$$
$$(\exists X)(\forall Y) \rightarrow (\forall Y)(\exists X)$$

2. *Relations symétriques*

Certaines relations sont telles que, si elles existent entre x et y, elles existent aussi entre y et x.

Exemples

« être de même taille »	pour deux individus
« être égal »	pour deux nombres
« se ressembler »	pour deux situations
« être frère »	pour deux *garçons*

Nous poserons alors la définition suivante pour exprimer qu'une relation est *symétrique :*

$$\text{Sym}\,(r) = \text{df}\,(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset ryx)$$

Remarquons maintenant que, parmi les relations qui ne sont pas symétriques, il en existe de deux espèces. Pour les unes (être père de, être plus petit que), il est incompatible d'avoir à la fois rxy et ryx. Nous les appellerons *asymétriques* et nous écrirons:

$$\text{Asym}\,(r) = \text{df}\,(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset \sim ryx)$$

Pour les autres (frère de, dans une famille qui compte des garçons et des filles), il existe seulement des cas où la symétrie n'a pas lieu. Nous les appellerons *non symétriques* et poserons:

$$\text{Non Sym}\,(r) = \text{df}\,(\exists x)\,(\exists y)\,(rxy \wedge \sim ryx)$$

Remarque

La terminologie « non symétrique » se justifie en établissant le théorème:
$\vdash\ \sim (\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset ryx) \equiv (\exists x)\,(\exists y)\,(rxy \wedge \sim ryx)$

3. *Relation inverse*

Quelle que soit la relation r, qu'elle soit symétrique ou qu'elle ne le soit pas, on peut considérer sa relation inverse.

Exemples

« fils de » et « père de »
« plus petit » et « plus grand »
« se ressembler » et « se ressembler »

Notons r^{-1} *la relation inverse de r*. Nous poserons la définition:

$r^{-1}xy \equiv \text{df } ryx$

Les théorèmes suivants sont faciles à établir:

(1) $\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,[(r^{-1})^{-1}xy \equiv rxy]$
(2) $\vdash \text{Sym } r \equiv \text{Sym } (r^{-1})$
(3) $\vdash \text{Sym } r \equiv (\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset r^{-1}xy)$

Ils signifient:

(1) L'inverse de l'inverse d'une relation est cette relation elle-même ou encore l'opération inverse est idempotente.
(2) Si une relation est symétrique, son inverse l'est aussi et réciproquement.
(3) Une relation est symétrique si elle est contenue dans son inverse.

Remarque

Cette façon de parler (« est contenue dans ») se justifie par la manière dont l'algèbre traite les relations en classes de couples.

4. *Relations réflexives*

Partons d'un exemple et considérons la relation $r = \text{df}$ avoir la même couleur que. Si x est un objet coloré, une tulipe par exemple, on pourra dire rxx. Le problème est de savoir s'il est légitime d'écrire: $(\forall x)\ rxx$, si, comme on dit, la relation « avoir même couleur que » est *totalement réflexive*. L'expression rxx est vraie pour une fleur, pour un fromage ou pour tout autre objet dont il y a un sens à dire qu'il a une couleur.

Mais, en dehors des métaphores, il n'y a aucun sens à dire que « 7 a même couleur que 7 » ou que « le quantificateur universel a même couleur que le quantificateur universel ».

C'est pourquoi, nous définirons la *réflexivité* sous l'hypothèse qu'il existe quelque objet y pour lequel soit rxy soit ryx :

$\text{Refl } (r) = \text{df } (\forall x)\ [(\exists y)\,(rxy \vee ryx) \supset rxx]$

En d'autres termes, nous ne définirons la propriété de réflexivité que dans le *domaine de la relation*, c'est-à-dire là où elle est définie.

Une relation qui n'est jamais réflexive, comme « père de », sera dite *irréflexive* et nous poserons:

$\text{Irr } (r) = \text{df } (\forall x)\ [(\exists y)\,(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx]$

Remarques

1. Il va de soi — c'est en pratique et en algèbre ce qu'on fait souvent — que lorsque le domaine Ω est tout juste choisi comme celui où la relation *r* a un sens, c'est-à-dire où Ω est formé des objets pour lesquels on a *rxy* ou *ryx*, on peut se contenter d'écrire:

$$\text{Refl}(r) \leftrightarrow (\forall x) rxx$$

Mais il faut veiller à ne pas élargir Ω sans rétablir la condition.

2. On peut se demander pourquoi nous n'avons pas pris des précautions analogues pour définir la propriété de symétrie. Il est aussi contestable de chercher à définir la symétrie d'une relation *r* entre des termes pour lesquels elle n'a pas de sens, que sa réflexivité. Toutefois, il existe une différence essentielle: la définition de Sym (*r*) contient déjà la restriction voulue puisqu'elle est de la forme: *si* la relation a lieu entre *x* et *y*, alors...

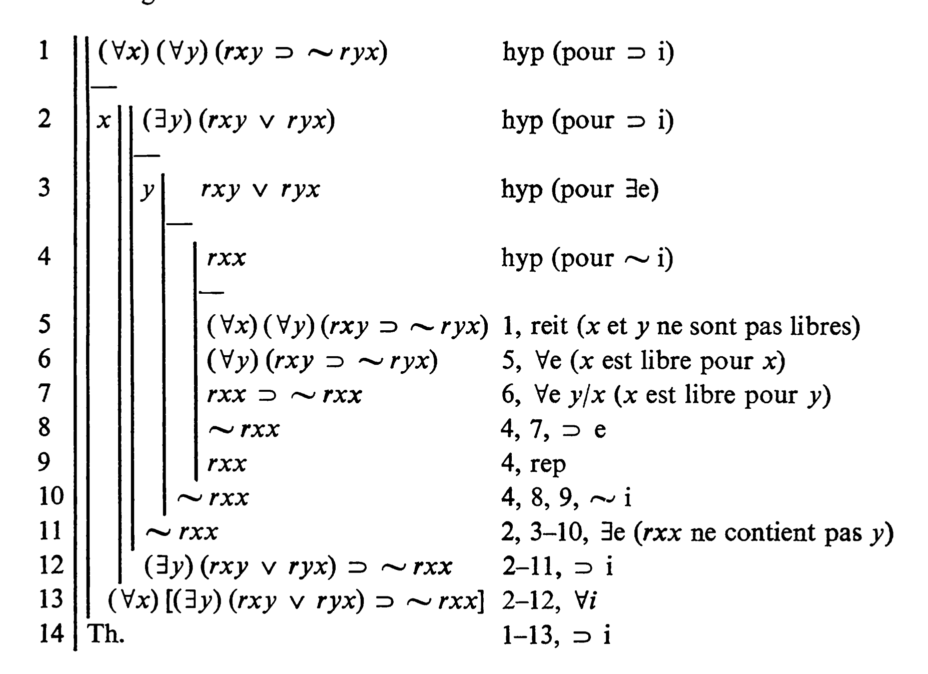
Théorème

Asym (*r*) → Irr (*r*) soit toute relation asymétrique est irréflexive.

Il faut prouver le théorème:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)(rxy \supset \sim ryx) \supset (\forall x)[(\exists y)(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx]$$

Effectuons la démonstration en guise d'exemple « concret » de l'application de nos règles.



1	$(\forall x)(\forall y)(rxy \supset \sim ryx)$	hyp (pour ⊃ i)
2	x | $(\exists y)(rxy \vee ryx)$	hyp (pour ⊃ i)
3	y | $rxy \vee ryx$	hyp (pour ∃e)
4	rxx	hyp (pour ∼ i)
5	$(\forall x)(\forall y)(rxy \supset \sim ryx)$	1, reit (*x* et *y* ne sont pas libres)
6	$(\forall y)(rxy \supset \sim ryx)$	5, ∀e (*x* est libre pour *x*)
7	$rxx \supset \sim rxx$	6, ∀e *y*/*x* (*x* est libre pour *y*)
8	$\sim rxx$	4, 7, ⊃ e
9	rxx	4, rep
10	$\sim rxx$	4, 8, 9, ∼ i
11	$\sim rxx$	2, 3–10, ∃e (*rxx* ne contient pas *y*)
12	$(\exists y)(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx$	2–11, ⊃ i
13	$(\forall x)[(\exists y)(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx]$	2–12, ∀*i*
14	Th.	1–13, ⊃ i

Remarques

1. On constate que l'hypothèse $(\exists y)(rxy \vee ryx)$ n'a pas été utilisée. Voici intuitivement pourquoi. Nous voulions montrer que si r est asymétrique, il n'existe aucun objet x pour lequel on ait rxx. Or ceci peut se produire pour deux raisons:
1) Il existe y et x, on a rxy mais la nature de r empêche d'avoir rxx.
2) L'objet x que l'on choisit n'est en relation r avec aucun autre. La relation r n'est ainsi pas définie pour x et, en particulier, on ne saurait dire que rxx.
2. La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. Exemple: soit $rxy = \text{df } x$ est le cousin de y. On n'a jamais rxx mais si x et y sont deux garçons et si rxy on a ryx.

5. *Relations transitives*

Considérons les trois relations suivantes:
1. plus petit de taille que : r_1
2. père de : r_2
3. ami de : r_3

Quels que soient x, y et z on a r_1xy et r_1yz alors r_1xz. La relation est *transitive*. D'autre part si r_2xy et r_2yz alors x est le grand père de z et jamais son père. La relation est *intransitive*. Enfin, si r_3xy et r_3yz, il se peut que x et z soient liés d'amitié, mais (sauf dans certaines leçons contestables d'algèbre!), ce n'est pas là une nécessité. La relation r_3 est *non transitive*.

Posons donc:

$$\text{Trans}(r) = \text{df } (\forall x)(\forall y)(\forall z)(rxy \wedge ryz \cdot \supset rxz)$$
$$\text{Intrans}(r) = \text{df } (\forall x)(\forall y)(\forall z)(rxy \wedge ryz \cdot \supset \sim rxz)$$
$$\text{Non trans}(r) = \text{df } (\exists x)(\exists y)(\exists z)(rxy \wedge ryz \wedge \sim rxz)$$

Remarque

La terminologie utilisée se justifie comme dans le cas de la symétrie. On a les deux propriétés importantes suivantes:

(1) $\vdash \text{Trans}(r) \wedge \text{Sym}(r) \cdot \supset \text{Refl}(r)$

(2) $\vdash \text{Trans}(r) \wedge \text{Asym}(r) \equiv \text{Trans}(r) \wedge \text{Irr}(r)$

Remarque

Il faut prendre les définitions que nous avons données à la lettre. Cela signifie que la réflexivité (et l'irréflexivité) sont définies sous *condition*. En d'autres termes, comme le montrerait la preuve du premier théorème, on ne peut pas remplacer la réflexivité par la réflexivité totale.

La preuve complète est un peu longue. Comme elle n'offre aucune

difficulté particulière, nous allons nous contenter d'expliquer pourquoi la condition qu'il existe un y pour lequel on a la relation rxy (ou ryx) est indispensable.

Les hypothèses seront:

(1) $(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(rxy \wedge ryz \cdot \supset rxz)$ transitivité

et (2) $(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset ryx)$ symétrie

En utilisant $\forall$e trois fois de suite, (1) donnera:

$rxy \wedge ryx \cdot \supset rxx$ (on a fait la substitution z/x)

Pour obtenir rxx, il faudra se procurer rxy et ryx. La règle $\wedge$i fournira l'antécédent de la conditionnelle et $\supset$e conduira à rxx.

Si on ne sait rien de plus, il est impossible d'avoir rxy. En revanche, si on sait qu'il existe y pour lequel on a rxy, alors (2) nous donnera aussi ryx et la déduction est possible.

6. *Relation d'équivalence*

Imaginons une classe C d'objets de différentes couleurs. Par exemple: b_1, b_2 et b_3 sont bleus, v_1 et v_2 sont verts, j_1 est jaune et n_1, n_2, n_3, n_4 sont noirs.

On a: C = df la classe de ces objets. On écrira:

$C = \text{df}\,\{b_1\, b_2\, b_3\, v_1\, v_2\, j_1\, n_1\, n_2\, n_3\, n_4\}$.

Considérons la relation rxy = df « x a même couleur que y » étant entendu que x et y sont des variables limitées à C.

Intuitivement, la relation r jouit des propriétés suivantes:

(1) Réfl (r)
(2) Sym (r)
(3) Trans (r)

Exemples

(1) rb_1b_1: b_1 a même couleur que b_1
(2) rb_1b_2 alors rb_2b_1
(3) rb_1b_2 et rb_2b_3 alors rb_1b_3

La propriété de réflexivité qui n'exige qu'un seul objet se vérifie sans autre pour les objets bleus, verts, jaunes et noirs. On voit aussi que la propriété de symétrie se vérifie sans autre pour les objets bleus, verts et noirs. Mais qu'en est-il pour l'unique objet jaune?

La définition de la symétrie qui est $(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset ryx)$ semble exiger que r existe entre deux objets. Toutefois, il faut se souvenir que x et y ne désignent pas nécessairement des éléments distincts. On peut donc avoir, en particulier: $rjj \supset rjj$. La proposition « Si l'objet jaune a même couleur que l'objet jaune alors l'objet jaune a même couleur que l'objet jaune » est trivialement vraie, mais elle est vraie et cela nous suffit.

On pourra faire une remarque analogue pour la transitivité appliquée, disons aux objets verts. Là aussi la propriété est trivialement satisfaite, mais elle l'est.

Définition: Toute relation réflexive, symétrique et transitive est dite une *relation d'équivalence*.

L'exemple donné permet de comprendre l'importance des relations de cette espèce: elles permettent de répartir les éléments d'une classe donnée en un certain nombre de classes, dites *classes d'équivalence*. Cette répartition, appelée une *partition*, est telle que

1) Tous les éléments de C appartiennent à une classe d'équivalence (quitte à ce que certaines d'entre elles, comme celle des objets jaunes dans l'exemple, ne comptent qu'un seul élément).

2) Les classes d'équivalence sont disjointes ce qui signifie qu'un objet de C ne peut figurer comme élément que dans une seule classe.

On écrit souvent $b_1b_2b_3 \cdot v_1v_2 \cdot j_1 \cdot n_1n_2n_3n_4$ pour représenter la partition de l'ensemble C donné en exemple, partition engendrée par la relation r: être de même couleur que.

Remarque

Ce que nous avons dit de la réflexivité distincte de la réflexivité totale, explique pourquoi il faut trois conditions pour définir une relation d'équivalence. Ce n'est que dans le cas où on a tout justement limité la classe C aux objets où la relation r est définie, qu'on a le droit d'appliquer le théorème:

$$\vdash \text{Trans}\,(r) \wedge \text{Sym}\,(r) \cdot \supset \text{Refl}\,(r).$$

7. *La relation d'identité*

Les lettres r, s, t utilisées jusqu'ici sont des variables. Cela signifie que nous nous sommes réservé le droit de les interpréter de telle ou telle façon selon le contexte. Il est très utile d'introduire encore une relation constante, bien déterminée, la *relation d'identité* que nous désignerons par $=$.

Contrairement à notre pratique et pour tenir compte de l'usage habituel, nous écrirons $x = y$ au lieu de $= xy$.

Conformément à la méthode utilisée dans ce chapitre, nous allons nous donner des règles pour introduire et éliminer la relation $=$.

Règle = i

$n \mid X = X \quad = \text{i}$

Règle = e

n	$A(X)$	
m	$X = Y$	
	—	
	$A[Y]$	$n, m, = \text{e}$

Remarques

1. La règle $=$ i, stipule qu'on a le droit d'introduire n'importe où dans une déduction la forme propositionnelle $X = X$. Cette expression est généralement appelée un *schéma d'axiome*.
2. La règle $=$ e pose que, si $X = Y$, on a le droit de *remplacer* X par Y dans toute expression qui mentionne X.

Théorème

[1] $\vdash (\forall x)(x = x)$

1	x	$x = x$	$=$ i
2		$(\forall x)(x = x)$	$1 - 1$, $\forall$i

La relation d'identité est totalement réflexive, c'est-à-dire qu'elle est définie par tous les domaines d'objets que l'on pourra considérer.

[2] $\vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$

1	y	$x = y$	hyp
2		$x = x$	$=$ i
3		$y = x$	1, 2, $=$ e
4		$x = y \supset y = x$	1–3, $\supset$ i
5		$(\forall y)(x = y \supset y = x)$	1–4 $\forall$i
6		$(\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$	1–5 $\forall$i

Remarque

A la ligne 2, $x = x$ est considéré comme une expression qui contient $x : A(x)$. La 1ère mention de x dans la ligne 2 (dans l'expression $A(x)$) a été remplacée par y, en vertu de la ligne 1.

La relation d'identité est symétrique.

[3] $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \wedge y = z \cdot \supset x = z)$

1	x y z	$x = y \wedge y = z$	hyp
2		$x = y$	1, $\wedge$ e
3		$y = z$	1, $\wedge$ e. Expression de la forme $A(y)$
4		$x = z$	2, 3, $=$ e
5		$x = y \wedge y = z \cdot \supset x = z$	1–4, $\supset$ i
6		$(\forall z)(x = y \wedge y = z \cdot \supset x = z)$	1–5, $\forall$i

7	$\quad(\forall y)(\forall z)(\ldots)$	1–6, $\forall$i
8	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\ldots)$	1–7, $\forall$i

La relation d'identité est transitive.

Il s'ensuit que la relation d'identité est une relation d'équivalence. Elle engendre sur toute classe la partition la plus fine possible, celle où chaque classe d'équivalence ne comporte qu'un seul élément.

8. *Relation antisymétrique*

Partons de l'exemple de la relation $\leqslant$ entre nombres. Son inverse est la relation $\geqslant$. Supposons qu'il existe deux nombres n et m, pour lesquels on ait simultanément $n \leqslant m$ et $m \geqslant n$. Ces deux propriétés impliquent que n et m désignent le même nombre.

D'une façon générale, on dit qu'une relation est antisymétrique si:

$$\text{Antisym}(r) = \text{df}\,(\forall x)(\forall y)(rxy \wedge r^{-1}xy \cdot \supset x = y)$$

« = » désigne naturellement la relation d'identité introduite plus haut.

9. *Relation connexe*

Considérons la relation d'implication entre propositions. On peut trouver deux sortes de couples de propositions distinctes (P, Q).

1ère espèce: P et Q sont telles que soit $P \to Q$, soit $Q \to P$.
Exemple: $(P, Q) = \text{df}\,(p \wedge q, p)$ on a $\vdash p \wedge q \supset p$ donc $p \wedge q \to p$, $P \to Q$
$(P, Q) = \text{df}\,(p \vee q, p)$ on a $\vdash p \supset \cdot p \vee q$, donc $p \to p \vee q$, $Q \to P$

2ème espèce: P et Q sont telles que ni la relation ni son inverse n'existent entre P et Q.
Exemple: $(P, Q) = \text{df}\,(p,\ p \supset q)$

Par opposition, considérons la relation $\leqslant$ entre nombres. On voit que, quels que soient les nombres n et m distincts, on aura toujours soit $n \leqslant m$, soit $m \leqslant n$. Nous caractériserons les relations qui jouissent de cette propriété en disant qu'elles sont *connexes*.

$$\text{Conn}(r) = \text{df}\,(\forall x)(\forall y)(x \neq y \supset \cdot\, rxy \vee r^{-1}xy).$$

Remarque
La notation $x \neq y$ est une abréviation pour $\sim (x = y)$.

10. *Les relations d'ordre*

Le tableau suivant définit un certain nombre de relations, qui sont diverses espèces d'un même genre: celui des relations d'ordre.

	Trans	Asym	Refl	Antisym	Conn
Ordre partiel strict	×	×			
Ordre strict	×	×			×
Préordre	×		×		
Ordre partiel	×		×	×	
Ordre complet	×		×	×	×

Remarque

La terminologie des relations d'ordre est encore assez variable, surtout d'une langue à l'autre. Il faut s'assurer chaque fois de prendre la relation avec les propriétés que lui donne son auteur.

BIBLIOGRAPHIE

3.1 Déduction naturelle

La méthode de la déduction naturelle est due à G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, trad. et commentaires de R. Feys et J. Ladrière (Paris, P.U.F., 1955). L'original allemand date de 1934.

La présentation adoptée dans ce fascicule est celle de F. B. Fitch, *Symbolic Logic* (New York, The Ronald Press Co, 1952). Il faut noter que la logique présentée dans cet ouvrage n'est pas la logique classique.

L'ouvrage de J. Dickoff et P. James, *Symbolic Logic and Language. A Programmed Text* (New York, McGraw-Hill, 1965) utilise aussi cette présentation, sous forme d'un cours programmé.

On trouve une présentation analogue, pour la logique des prédicats seulement, dans W.V.O. Quine, *Methods of Logic*, rev. ed. (New York, Holt, Rinehart and Winston, 1961).

3.2 Manuels

Voici quelques manuels qui utilisent d'autres formes de présentation (voir les Fascicules 2 et 4).

I. M. Bochenski, *Précis de logique mathématique*. Bussum, Kroonder, 1948.

J. Dopp, *Notions de logique formelle*. Paris, Ed. Béatrice-Nauwelaerts, 1965.

A. N. Prior, *Formal Logic*. Oxford, Clarendon Press, 2e éd. rev., 1962.

P. Suppes, *Introduction to Logic*. Princeton, Van Nostrand Co, 1957.

Sans être à proprement parler un manuel, l'ouvrage de R. Blanché, *Introduction à la logique contemporaine* (Paris, A. Colin, 1957) est une excellente introduction.

3.3 Quelques ouvrages plus approfondis

A Church, *Introduction to Mathematical Logic I.* Princeton Univ. Press, 1956.

H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic.* Londres, McGraw Hill Co, 1963.

S. C. Kleene, *Mathematical Logic.* London, John Wiley & Son, 1967.

R. Martin, *Logique contemporaine et formalisation.* Paris, P.U.F., 1964.

P. S. Novikov, *Introduction à la logique mathématique.* Paris, Dunod, 1964.

3.4 Logiques non classiques

H. B. Curry, *Leçons de logique algébrique.* Paris et Louvain, Gauthier-Villars et E. Nauwelaerts, 1952.

J. Dopp, *Logiques construites par une méthode de déduction naturelle.* Louvain et Paris, E. Nauwelaerts et Gauthier-Villars, 1962.

3.5 Sources bibliographiques

On en trouve d'importantes en particulier dans Curry, 1963 et Kleene, 1967.

LISTE DES SYMBOLES

La page est celle où le symbole est introduit pour la première fois.

4.1 Symboles logiques

Symbole	*explication*	*Page*
a, b, c	variables de prédicats à une place	48
p, q, m	variables de propositions	6
r, s, t	variables de prédicats à plus d'une places ou variables de relations	48
x, y, z	variables d'objets	48
$\supset$	opérateur *si...alors*	11
$\wedge$	opérateur *et*	17
$\equiv$	opérateur *si et seulement si*	20
$\vee$	opérateur *ou*	28
$\sim$	opérateur *non*	33
W et I	abréviations	67
$\forall$	quantificateur universel	46
$\exists$	quantificateur existentiel	46
$=$	signe de la relation d'identité	76
$\neq$	négation du signe précédent	78

4.2 Symboles métalogiques

A, B, C	métavariables prenant des expressions prédicatives comme valeurs	49
P, Q, M	métavariables prenant des expressions propositionnelles comme valeurs	7
X, Y, Z	métavariables prenant des variables d'objets comme valeurs	49

$\vdash$	abrège: permet de déduire ou ce qui suit est un théorème	13
$\rightarrow$	désigne la relation d'implication	26
$\leftrightarrow$	désigne la relation d'équivalence logique	27
$\Rightarrow$	abrège: si ... alors	24
$=$ df	abrège: égale par définition	10

4.3 Symboles mathématiques

$\varnothing$	classe vide	15
$\{\ \}$	désigne une classe	7
Ω	ensemble des objets	43
Π	ensemble des prédicats	43

LISTE DES RÈGLES

Une petite barre horizontale indique que la proposition qui la surmonte est nécessairement posée comme hypothèse. Des traitillés horizontaux signifient que ce qui précède sert de prémisse à l'application de la règle.

5.1 Règles générales

Règle hyp

```
| P
| —
|
|
```

Règle rep

```
| P
| - - -
| P
|
```

Règle reit

```
| P
| - - -
|    | P
|    |
```

Règle repdf

Si Q = df P

```
| P            | Q
| - - -   et   | - - -
| Q            | P
```

5.2 Règles pour les opérateurs propositionnels

Règle ⊃ i

```
|   | P
|   | —
|   | ⋮
|   | Q
| - - -
| P ⊃ Q
```

Règle ⊃ e

```
| P ⊃ Q
| P
| - - -
| Q
|
```

Règle ∧ i

```
| P
| Q
| - - -
| P ∧ Q
```

Règle ∧ e

```
| P ∧ Q             | P ∧ Q
| - - -      et     | - - -
| P                 | Q
|                   |
```

Règle ≡ i

$P \supset Q$
$Q \supset P$
- - -
$P \equiv Q$

Règle ≡ e

$P \equiv Q$
P
- - -
Q

et

$P \equiv Q$
Q
- - -
P

Règle ∨ i

P
- - -
$P \vee Q$

et

Q
- - -
$P \vee Q$

Règle ∨ e

$P \vee Q$
- - -
  P
  —
  M

  Q
  —
  M

M

Règle ∼ i

  P
  —
  Q
  $\sim Q$
- - -
$\sim P$

Règle ∼ e

P
$\sim P$
- - -
Q

5.3 Règles négatives

Règle neg ∼ i

P
- - -
$\sim \sim P$

Règle neg ∼ e

$\sim \sim P$
- - -
P

Règle neg ∧ i

$\sim P \vee \sim Q$
- - -
$\sim (P \wedge Q)$

Règle neg ∧ e

$\sim (P \wedge Q)$
- - -
$\sim P \vee \sim Q$

Règle neg ∨ i

$\sim P \wedge \sim Q$
- - -
$\sim (P \vee Q)$

Règle neg ∨ e

$\sim (P \vee Q)$
- - -
$\sim P \wedge \sim Q$

Règle neg ⊃ i

$P \wedge \sim Q$
- - -
$\sim (P \supset Q)$

Règle neg ⊃ e

$\sim (P \supset Q)$
- - -
$P \wedge \sim Q$

5.4 Règles pour les quantificateurs

Règle ∀ i

X | $A(X)$

$(\forall X)\, A(X)$

Règle ∀ e

$(\forall X)\, A(X)$

$A(Y)$

A condition que Y soit libre pour X et de *substituer* Y à X.

Règle ∃ i

$A(X)$

$(\exists Y)\, A[Y]$

A condition que Y soit libre pour X, on peut *remplacer* X par Y.

Règl ∃ e

$(\exists X)\, A(X)$

X | $A(X)$

—

P

P

Règle neg ∀ i

$(\exists X) \sim A(X)$

$\sim (\forall X)\, A(X)$

Règle neg ∀ e

$\sim (\forall X)\, A(X)$

$(\exists X) \sim A(X)$

Règle neg ∃ i

$(\forall X) \sim A(X)$

$\sim (\exists X)\, A(X)$

Règle neg ∃ e

$\sim (\exists X)\, A(X)$

$(\forall X) \sim A(X)$

5.5 Règles pour l'identité

Règle = i

$X = X$

Règle = e

$A(X)$

$X = Y$

$A[Y]$

On peut se contenter de *remplacer* X par Y

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE I

COLLECTION
MATHÉMATIQUES ET
SCIENCES DE L'HOMME

1. **B. MATALON**
   L'analyse hiérarchique.
2. **C. FLAMENT**
   Théorie des graphes et structures sociales.
3. **P. R. HALMOS**
   Introduction à la théorie des ensembles.
   Traduit par J. Gardelle.
4. **H. ROUANET**
   Les modèles stochastiques d'apprentissage.
5. **R. V. ANDREE**
   Introduction à l'algèbre.
   Traduit par Mme F. Denizot.
6. **P. LORENZEN**
   Métamathématique.
   Traduit par J. B. Grize.
7. **CAHIERS MATHÉMATIQUES I**
   Exercices corrigés sur des structures élémentaires.
8. **N. CHOMSKY et G. A. MILLER**
   L'analyse formelle des langues naturelles.
   Traduit par P. Richard et N. Ruwet.
9. **CAHIERS MATHÉMATIQUES 2**
   Exercices corrigés sur des structures élémentaires.
10. **J.-B. GRIZE**
    Logique moderne.
    Fascicule I.
11. **L. FREY**
    Analyse ordinale des évangiles synoptiques.
12. **ORDRES**
    Travaux du séminaire sur les ordres totaux finis, Aix-en-Provence.
13. **CAHIERS MATHÉMATIQUES 3**
    Algèbre et combinatoire.
14. **J.-B. GRIZE**
    Logique moderne.
    Fascicule II.
15. **B. LECLERC**
    Distributions statistiques et lois de probabilité.
16. **A. LENTIN**
    Équations dans les monoïdes libres.

MOUTON

GAUTHIER-VILLARS

